НА СТЫКЕ ВСЕХ НАУК

научно-методические
материалы
летней школы

Издательство
Красноярского
университета

Красноярск
1989

УДК 374.3.013.75

На стыке всех наук (научно-методические материалы летней школы). Красноярск: Изд-во Краснояр. ун-та, 1989. 216 с.

В книге представлены материалы, отражающие разнообразную деятельность летней школы при Красноярском университете. В нее включены четыре курса лекций, посвященных анализу ошибок эксперимента, физическим приложениям простейших дифференциальных уравнений, газовым законам и расшифровке поэтического текста. Каждый из этих курсов успешно осваивался старшеклассниками за три недели. Впервые публикуются обширная подборка задач по биологии и комментированные художественные работы известного математика А. Т. Фоменко.
Для учителей и всех, кто работает со школьниками, для молодежи.

Издание подготовили:
канд. физ.-мат. наук *В. А. Болотов*,
канд. физ.-мат. наук *В. О. Бытев* (отв. за вып.),
канд. физ.-мат. наук *А. Н. Горбань*,
С. В. Семенов, И. Д. Фрумин.

НА СТЫКЕ ВСЕХ НАУК

Научно-методические материалы летней школы

ИБ № 458

Редактор
В. В. Осьминкина
Оформление и макет
Л. М. Живило
Технический редактор
Н. В. Козлова
Корректор
И. А. Паламарчук

Сдано в набор 20.06.88. Подписано к печати 19.05.89. Формат $84\times108^1/_{32}$. Бумага тип. № 3. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 12,5. Уч.-изд. л. 10,18. Тираж 2000 экз. Заказ 357. Цена 50 к.
Издательство Красноярского университета, 660049, Красноярск, пр. Мира, 53.
Типография издательства «Красноярский рабочий», 660017, Красноярск, пр. Мира, 91.

$\text{Н}\,\frac{14\ 03\ 000\ 000}{178\ (012)-89}\ 25-89$

ISBN 5-7470-0093-4

К СВЕДЕНИЮ НЕТЕРПЕЛИВЫХ ЧИТАТЕЛЕЙ

История этой книги началась с самовара... В летней школе у настоящего самовара с трубой и сапогами собираются любители поговорить. В тот злосчастный вечер обсуждался вопрос «Какой должна быть научно-популярная книга для школьников?». Когда разговор уже увядал, девятиклассник Саша В. (участник Всероссийской физической олимпиады, спортсмен-разрядник и, вообще, человек, именуемый за настырность крокодильчиком) мечтательно заметил: «Книга должна быть похожа на летнюю школу: пусть в ней будут и интересные лекции, и трудные задачи, и запах сосен, и музыка, и картины, и спортивные игры, и лабораторные работы, и стихи...». Идея была достаточно бредовой, чтобы вызвать живое обсуждение, и мы, сотрудники школы, тертые калачи, поддались на провокацию. Не заметили, как через пятнадцать минут обсуждения оказались перед доброй сотней глаз воспитанников, ожидавших ответа на вопрос «А слабо вам сделать такую книжку?». Теперь можно только гадать, что именно — горячий чай, величественный вид Енисея или свойственная летней школе удаль — заставило нас ответить: «А вот и не слабо!».

В тот же вечер с помощью учеников мы составили проект книги. Постепенно по техническим причинам из нее исчезли многие важные компоненты: запах, музыка и т. п. Но кое-что осталось. И это кое-что мы посвящаем тем, кто впервые решал эти задачи, с кем мы имели честь вместе заниматься «на стыке всех наук» — ученикам краевой летней школы по естественным наукам при Красноярском государственном университете.

А теперь несколько слов о материалах, отобранных школьниками для книги. Основную часть составляют четыре лекционных курса. Всего несколько лекций и небольшой набор задач позволяют вдумчивому читателю войти в обширные пласты современной науки.

Лекции М. А. Шубина «Введение в математический анализ для физических задач» демонстрируют глубокую связь между разнообразными физическими явлениями и их единым математическим описанием. Работая над этим курсом, можно не только познакомиться с основными понятиями математического анализа — производной и интегралом (и даже с простейшими дифференциальными уравнениями), но и научиться их применять, получать численные ответы. Входит в этот курс лекций, например, изящная задачка: «Из круглого отверстия в дне сосуда вытекает вода. Половина ее вытекла за пять минут. Через сколько минут вытечет оставшаяся половина воды?».

«Лекции о газовых законах» А. Н. Горбаня пользуются среди учеников школы особой популярностью. К сожалению, многие юные физики считают, что, познакомившись с некоторыми формулами, они узнали термодинамику. В предлагаемом курсе под школьными законами идеального газа выстраивается глубокое физическое содержание. Более того, оказывается, можно рассмотреть неидеальный газ, вывести для него законы, проанализировать явления диффузии и переноса в газах.

Необычное название «Физматика» носит учебный курс, который в школе обычно читают юным биологам и химикам. От физики в нем — идеология организации эксперимента, от математики — методы математической обработки (и даже планирования) любого эксперимента. Без анализа погрешностей, статистических оценок эксперимента сегодня не может обойтись ни один испытатель природы.

Науку о понимании можно назвать «пониматикой» (ученое ее название — герменевтика). В школьные годы нас, худо-бедно, учат физической и математической «пониматике». А вот понимать художественные произведения мы учимся самостоятельно и не всегда удачно. Лекции А. Б. Мордвинова — попытка восполнить этот пробел. Они возникают как бы на стыке естественно-научного логического мышления и общечеловеческой культуры, без которой не может быть ученого. Особый интерес представляет не только оригинальное толкование цикла стихов А. Блока «На поле Куликовом», но и сам метод глубокого прочтения. Читатель может, проникнувшись этим методом, попробовать по-новому перечитать хрестоматийно «заглянцованные» произведения.

Возможно, неожиданной и поэтому наиболее значительной частью книги является подборка задач олимпиады, проводимой много лет биологическим факультетом Московского университета. В столь большом объеме эти задачи публикуются впервые. Они уже давно любимы в летней школе, раскрывают своеобразный и сложный мир живого, демонстрируют зазнавшимся физикам и математикам, какими тонкими и нетривиальными могут быть биологические рассуждения.

Уже несколько сезонов в числе самых посещаемых вечеров в клубе нашей школы вечер, посвященный графическим работам известного математика А. Т. Фоменко. Профессор Фоменко любезно предоставил нам для первого опубликования несколько своих работ — фантазий на математические темы.

Вместо заключения на последних страницах книги дан короткий рассказ о летней школе. Короткий не потому, что нечего рассказать, а потому, что лучше один раз увидеть (а еще лучше один раз поучиться)... И последнее. Каждый год в летней школе происходит много интересного. Такого, что могло бы послужить материалом для новой книги. Поэтому мы не теряем надежду составить когда-нибудь книгу, похожую на летнюю школу. Заканчиваем введение просьбой к читателям: если у Вас будут замечания по поводу этой книги или предложения по поводу будущей — звоните, пишите и приезжайте по адресу: 660062, Красноярск, пр. Свободный, 79, Красноярский университет, краевая летняя школа.

А пока пусть эта книга поставит перед Вами новые вопросы и проблемы... Вот так!

А. О. Ганаго

ЛЕКЦИИ ПО ФИЗМАТИКЕ

Погрешности в измерениях

Ни одно измерение не может быть абсолютно точным. Когда исследователь измеряет некоторую величину x, он получает ее значение с погрешностью $\Delta x>0$.

$$\text{ИЗМЕРЕННАЯ ВЕЛИЧИНА}=x\pm\Delta x. \qquad (1)$$

Запись (1) означает, что если опыт по измерению той же величины повторить еще несколько раз, то большинство результатов этих измерений попадет в интервал от $x-\Delta x$ до $x+\Delta x$.

Откуда возникают погрешности? Во-первых, из-за конечной точности измерительных приборов. Например, если мы измеряем длину линейкой с миллиметровыми делениями, то вряд ли удастся получить результат с погрешностью меньше, чем 0,5 мм. Если мы измеряем массу, положив груз на одну чашку весов и гири — на другую, то точность измерений будет ограничиваться чувствительностью весов, в частности, силами трения в их механизме. Грубые весы могут «не заметить», что мы добавили гирьку 1 г, и погрешность измерения на них будет не меньше 1 г. Более точные весы «заметят» гирьку 1 г, но не почувствуют, например, 1 мг, и т. д. У каждого прибора своя точность измерений.

Во-вторых, причиной погрешностей являются так называемые «ошибки определения». Представьте себе весы настолько точные, что могут почувствовать массу отдельной молекулы. Оказывается, работать с ними будет очень сложно. Исследуемый образец все время теряет какое-то количество молекул за счет испарения (сублимации), а в окружающем воздухе есть молекулы воды, которые могут оседать на наш образец, гири, чашки весов. Получая сверхточные данные, мы должны будем специально договариваться о том, какую именно величину считать массой образца. Такой договор подразумевает некоторую погрешность. Ее-то и называют ошибкой определения.

На результаты измерений всегда влияют многие причины. Показания весов зависят не только от массы

взвешиваемого образца, но и от силы притяжения его к Земле (эта сила различна в разных географических точках), от силы притяжения Луны, Солнца и звезд, от выталкивающей силы воздуха (она зависит от плотности воздуха, а значит, от температуры в комнате), от трения в подвесе коромысла и чашек весов, даже от температуры гирь (если они очень холодные, на них выпадет роса из воздуха, и они станут тяжелее). Можно найти еще множество причин. Некоторые из них важны (трение в весах), другие менее значительны (притяжение звезд). Действие этих причин может быть случайным. Например, из-за сил трения весы один раз «не заметят», что мы добавили гирьку 1 г, и покажут завышенный результат; другой раз весы «не заметят», что мы сняли гирьку 1 г, и результат окажется заниженным. Влияние случайных погрешностей, которые каждый раз по-разному меняют результат опыта, можно усреднить, а их величину рассчитать. Случайные влияния многих причин — третий источник погрешностей при измерениях.

Четвертым источником погрешностей являются так называемые систематические ошибки. Если один (или несколько) из многих влияющих на измерения факторов действует так, что результаты всех опытов оказываются завышенными (или, наоборот, все результаты занижены), то усреднение данных не поможет нам найти истинную величину погрешности. Так получается при использовании плохих приборов (кривые линейки, неравноплечие весы, отстающий секундомер), при неправильной постановке опытов (например, когда гири хранят в холодном месте, и при взвешивании в теплой комнате на них всегда оседают капельки воды) и т. п. «Систематическая ошибка эксперимента» — это вежливое выражение, означающее «ошибка экспериментатора». Случайные погрешности при измерениях неизбежны, и цель грамотного исследователя состоит в том, чтобы правильно их оценить и провести опыты так, чтобы эти погрешности были наименьшими. Систематические ошибки возникают из-за неаккуратности в работе, из-за невнимательности, из-за незнания того, какие причины могут влиять на результаты измерений. Дело чести каждого исследователя — продумать постановку опытов так, чтобы исключить вклады систематических погрешностей, и поставить контрольные опыты, чтобы убедиться, что систематические погрешности действительно малы (например, не превосходят случайных).

Выводы. В измерениях неизбежны погрешности. Они возникают из-за конечной точности приборов, ошибок определения, влияния многих случайных факторов, неправильно выбранного способа измерений (систематических ошибок).

Как обращаться с величинами, погрешности которых известны

Прежде всего не нужно обманывать себя, изображая величины точнее, чем мы их знаем. Например, если известно, что каждый день в город приезжают и уезжают из него около 100 человек, то не следует говорить, что население города составляет 43587 человек. В этом числе мы не знаем точно ни единицы, ни даже десятки. Цифры 7 и 8 не значащие, результат нужно округлить до сотен, записав (43600 ± 100) человек или ($43{,}6 \pm 0{,}1$) тыс. чел.

Погрешности обычно округляют до одной значащей цифры. Последняя значащая цифра в любом приводимом результате обычно должна быть того же порядка (находиться в той же десятичной позиции), что и погрешность. Однако в расчетах, пока мы еще не получили окончательный результат, имеет смысл оставлять на одну значащую цифру больше. Это уменьшает неточности, возникающие при округлении чисел.

Сравнивая между собой величины с погрешностями, нужно помнить об этих погрешностях. Например, мы знаем, что $2{,}5 > 2{,}4$. Но если известно, что размер одной клетки водоросли ($2{,}5 \pm 0{,}1$) мкм, а другой клетки ($2{,}4 \pm \pm 0{,}1$) мкм, то мы не можем сказать, что первая клетка крупнее второй: разность размеров такая же, как погрешность. Чтобы различить эти клетки по размерам, нужно уменьшить погрешности хотя бы в два раза. Понятно, что погрешности нужно учитывать при вычислениях с величинами, полученными в опытах. Погрешность каждой величины сказывается на погрешности результата вычислений.

Рассмотрим сложение двух величин $x \pm \Delta x$ и $y \pm \Delta y$. Самое большое значение их суммы равно $x + \Delta x + y + \Delta y$,

а самое маленькое — $x - \Delta x + y - \Delta y$. Иначе говоря, при сложении двух величин их погрешности тоже складываются:

$$\Delta(x+y) = \Delta x + \Delta y. \qquad (2)$$

При вычитании $(x \pm \Delta x) - (y \pm \Delta y)$ самое большое значение разности получается, когда из $x + \Delta x$ вычитают $y - \Delta y$, а самое маленькое значение разности будет при $x - \Delta x$ и $y + \Delta y$. Сравнивая эти величины, видим, что при вычитании погрешности складываются:

$$\Delta(x-y) = \Delta x + \Delta y. \qquad (3)$$

С первого взгляда могло показаться, что при вычитании будет происходить вычитание погрешностей, но такое предположение приводит к нелепым выводам: если $\Delta x = \Delta y$, то при вычитании погрешностей результат получился бы с нулевой погрешностью, то есть абсолютно точным, а этого не может быть. Итак, **при сложении и вычитании величин их погрешности складываются.**

А как быть при умножении и делении? Погрешность Δx измерена в тех же единицах, что и сама величина x. Например, если y — путь, то Δy измеряется в метрах; если x — время, то Δx измеряется в секундах. Складывать такие погрешности, как складывали раньше (2), (3), нельзя, поскольку неизвестно, в каких единицах получится результат. Делить Δx на Δy тоже нежелательно. Оказывается, нужно складывать относительные погрешности.

$$\text{ОТНОСИТЕЛЬНАЯ ПОГРЕШНОСТЬ} = \frac{\Delta x}{|x|}. \qquad (4)$$

Понятно, что относительная погрешность измеряется в процентах, она всегда больше нуля. Чтобы знать, о какой погрешности идет речь, величину Δx называют абсолютной погрешностью.

Рассмотрим произведение двух величин $(x \pm \Delta x) \cdot (y \pm \Delta y)$ и воспользуемся понятием относительной погрешности. Если $x > 0$ и $y > 0$, то наибольшее значение их произведения

$$(x + \Delta x) \cdot (y + \Delta y) = x \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \cdot y \cdot \left(1 + \frac{\Delta y}{y}\right) =$$

$$= x \cdot y \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y} + \frac{\Delta x}{x} + \frac{\Delta y}{y}\right).$$

Последнее слагаемое в скобках мало, если каждая из относительных погрешностей невелика. Например, если $\Delta x/x=5\%$ и $\Delta y/y=2\%$, то $(\Delta x/x)\cdot(\Delta y/y)=0{,}1\%$. Почти всегда таким членом можно пренебречь, следовательно, наибольшее произведение равно

$$(x+\Delta x)\cdot(y+\Delta y)\cong x\cdot y\cdot\left(1+\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}\right).$$

Точно так же наименьшее значение произведения получается равным

$$(x-\Delta x)\cdot(y-\Delta y)=x\cdot\left(1-\frac{\Delta x}{x}\right)\cdot y\cdot\left(1-\frac{\Delta y}{y}\right)=$$

$$=x\cdot y\left(1-\frac{\Delta x}{x}-\frac{\Delta y}{y}+\frac{\Delta x}{x}\cdot\frac{\Delta y}{y}\right).$$

Короче говоря,

$$\Delta(x\cdot y)=|x\cdot y|\cdot\left(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}\right) \tag{5}$$

или

$$\frac{\Delta(x\cdot y)}{|x\cdot y|}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}. \tag{6}$$

При умножении двух величин складываются их относительные погрешности. Это справедливо не только для положительных x и y, поэтому в (5) и (6) стоит абсолютная величина произведения (справедливость выражений (5) и (6) для сомножителей разных знаков можно легко проверить, это — полезное самостоятельное упражнение).

Очень похожие рассуждения приводят к выводу о том, что **при делении двух величин их относительные погрешности тоже складываются:**

$$\Delta\left(\frac{x}{y}\right)=\left|\frac{x}{y}\right|\cdot\left(\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}\right), \tag{7}$$

$$\frac{\Delta\left(\frac{x}{y}\right)}{\left|\frac{x}{y}\right|}=\frac{\Delta x}{x}+\frac{\Delta y}{y}. \tag{8}$$

Рассмотрим пример вычислений. Тело проходит путь (10 ± 1) м за время $(1{,}00\pm0{,}01)$ с. Вопрос в том, как

вычислить погрешность этой величины. Если бы мы попытались делить 1 м на 0,01 с, то получили бы 100 м/с, и в ответе (10 ± 100) м/с, что совсем не похоже на правду, поскольку каждая из исходных величин измерена небольшой погрешностью. Найдем относительные погрешности: 1 м/10 м $=0{,}1=10\%$; 0,01 с/1 с $=0{,}01=1\%$. Учитывая формулу (8), сложим относительные погрешности: $10\%+1\%=11\%$. Такова относительная погрешность скорости. Абсолютная погрешность скорости: 10 м/с$\cdot11\%=1{,}1$ м/с. В результате скорость равна $(10\pm1{,}1)$ м/с. Учитывая правило округления, пишем: (10 ± 1) м/с.

Знание того, как складываются погрешности, помогает правильно организовать опыты, чтобы получить более точный результат. Так, в рассмотренном примере погрешность определения скорости 11% складывается из погрешности определения пути 10% и погрешности времени 1%. Если мы вдвое улучшим точность измерений времени, то получим общую погрешность 10,5%; но если в два раза уменьшить погрешность измерения пути, то погрешность скорости уменьшится до $5\%+1\%=$ $=6\%$. В данном случае наибольший вклад в общую погрешность дают измерения пути, и именно их нужно улучшать для уменьшения погрешности результата. Уменьшение погрешности измерения времени практически не повлияет на погрешность результата.

Выводы. Все результаты измерений нужно приводить с их погрешностями. Знание погрешностей необходимо для сравнения результатов разных опытов. При сложении и вычитании складываются абсолютные погрешности. При умножении и делении складываются относительные погрешности. Правило сложения погрешностей помогает организовывать опыты.

Статистический анализ результатов измерений

Мы уже говорили, что при многократном повторении опытов большинство результатов измерений оказывается в интервале от $x-\Delta x$ до $x+\Delta x$. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Нам поможет ступенчатый график, называемый гистограммой (рис. 1). Разделим ось x на маленькие интервалы длиной δx каждый, а по вертикальной оси будем откладывать число опытов. Над каждым интервалом нарисуем ступеньку на высоте, равной числу опытов, результаты которых попали в этот интервал. Над часто повторяющимися значениями ступеньки будут повыше, над редкоповторяющимися — пониже. Если общее число опытов невелико (например, несколько десятков), то ступеньки гистограммы могут выглядеть беспорядочно (см. рис. 1, а).

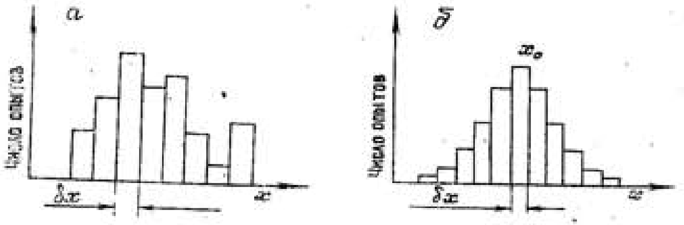

Рис. 1.

При увеличении числа опытов можно уменьшить длину каждого интервала δx (см. рис. 1, б), и во многих случаях будет заметно, что результаты измерений группируются в основном вблизи некоторого среднего значения x_0. Опыты, результаты которых сильно отличаются от x_0, бывают редко.

При очень большом числе опытов (скажем, нескольких тысячах) ступеньки гистограммы можно сделать очень узкими, и они сольются в плавную кривую. Такую кривую называют функцией распределения. Понятно, что в разных опытах кривые будут получаться разными, но удивительный и очень важный факт состоит в том, что в очень многих случаях (когда в измерениях сказываются случайные погрешности, вызванные многими неизвестными причинами) функцию распределения удается описать одним и тем же математическим выражением. Такое распределение называют гауссовым или нормальным. Функция Гаусса записывается так:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x - x_0)^2}{2 \cdot \sigma^2}}. \tag{9}$$

Она играет очень большую роль в обработке результатов измерений и заслуживает того, чтобы мы ее рассмотрели подробно.

Иррациональное число $e = 2{,}718281828...$ часто встречается во многих разделах математики. Функция $f(x)$ имеет максимум при $x = x_0$, т. к. $e^0 = 1$, и уменьшается при отклонении x от x_0 в любую сторону. Величина параметра показывает, на сколько нужно отклониться от x_0, чтобы $f(x)$ уменьшилась в заданное число раз. Например, при $x - x_0 = \pm\sigma$ показатель степени равен $-0{,}5$; это значит: функция $f(x)$ уменьшается в $\cong 1{,}65$ раза при отклонении от среднего значения x_0 на величину $+\sigma$ или $-\sigma$. Если $x - x_0 = \pm 2\sigma$, то показатель степени равен -2 и функция $f(x)$ уменьшается $\cong$ в 7,4 раза при отклонении от среднего значения x_0 на $+2\sigma$ или -2σ. При $x - x_0 = \pm 3\sigma$ показатель степени равен $-4{,}5$ и $f(x)$ уменьшается $\cong$ в 90 раз. Видно, что σ — ширина функции Гаусса, эту величину называют также стандартным отклонением. Вспомнив, как мы пришли к функции Гаусса, поймем, что распределение с малым σ изображается узкой кривой (рис. 2, а) и соответствует результа-

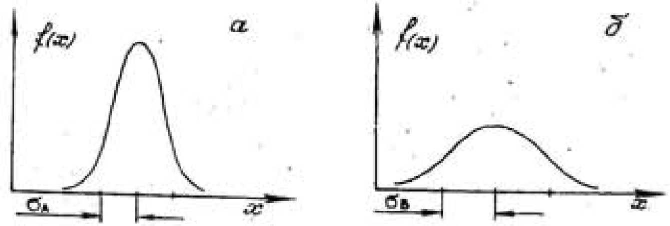

Рис. 2

там измерения с небольшим разбросом данных (высокой точностью). Наоборот, при большом σ кривая становится широкой (см. рис. 2, б), это соответствует большой погрешности измерений.

Из рисунков понятно, что довольно большая доля опытов дает результаты вблизи среднего значения $x = x_0$. Для гауссовой функции можно сделать тонкий расчет (табл.).

Таким образом, больше 2/3 всех опытов дают результаты в промежутке от $x - \sigma$ до $x + \sigma$ (рис. 3, а). В промежуток от $x - 2\sigma$ до $x + 2\sigma$ попадают результаты более 95% всех опытов (см. рис. 3, б). Теперь можно дать количественное описание величины Δx в формуле (1). Если условиться, что «большинство результатов» означает 2/3, то $\Delta x=\sigma$. Довольно часто исследователи именно так приводят свои данные. Предположив, что «большинство результатов» = 95%, нужно считать, что $\Delta x = 2\sigma$. Ясно, что грамотный экспериментатор должен точно указать, как именно он вычислял погрешность Δx.

Таблица

Доверительные интервалы для распределения Гаусса

Промежуток		Доля опытов, дающая результаты в этом промежутке, %
от	до	
$x-0{,}5\cdot\sigma$	$x+0{,}5\cdot\sigma$	38,3
$x-1{,}0\cdot\sigma$	$x+1{,}0\cdot\sigma$	68,3
$x-2{,}0\cdot\sigma$	$x+2{,}0\cdot\sigma$	95,5
$x-3{,}0\cdot\sigma$	$x+3{,}0\cdot\sigma$	99,7

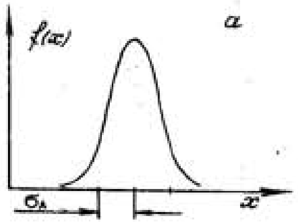

Рис. 3

Можно точнее определить, что значит «различаются ли две величины?». Если мы сравниваем величину x_1, измеренную со стандартным отклонением σ_1, и величину x_2 со стандартным отклонением σ_2, то абсолютную величину разности $|x_1-x_2|$ нужно сравнить с суммой стандартных отклонений $\sigma_1+\sigma_2$. Если $|x_1-x_2| = \sigma_1+\sigma_2$, то примерно в 1/3 опытов (точнее, 100% — 68,3% = 31,7%) результаты измерений x_1 и x_2 могут совпадать. Обычно такие величины считают неразличимыми. Наоборот, при $|x_1-x_2| \geqslant 2(\sigma_1+\sigma_2)$ совпадение возможно менее чем в 5% случаев, такое различие принято считать значимым.

Выводы. Функция Гаусса (нормальное распределение) описывает распределение результатов измерений,

погрешность которых обусловлена многими случайными причинами. Ширина функции Гаусса (стандартное отклонение) мала, если мала погрешность измерений. Для сравнения двух величин нужно знать их стандартные отклонения. Если разность величин не превосходит суммы стандартных отклонений, то величины неразличимы.

Как обрабатывать результаты опыта

Чтобы строить гистограмму и сравнивать ее форму с функцией Гаусса, нужно повторять измерения сотни раз. Так делают очень редко. Как правило, главные характеристики гауссова распределения (среднее значение x_0 и стандартное отклонение σ) вычисляют из небольшого числа данных. Результаты расчетов, сделанных на основе 5 или 7 измерений, могут отличаться от результатов расчета тех же параметров x_0 и σ, которые можно вычислить, зная данные 100 или 1000 измерений, но таким различием часто пренебрегают.

Повторим измерение одной величины x несколько раз (n раз). Результаты измерений будем обозначать $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$. Среднее значение

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (10)$$

Стандартное отклонение результатов опыта от среднего значения σ вычисляют по формуле

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1-x_0)^2 + (x_2-x_0)^2 + \ldots + (x_n-x_0)^2}{n-1}}. \qquad (11)$$

Почему в формуле (11) стоит в знаменателе $n-1$ вместо n? Оказывается, что при небольших n такая формула дает лучшую оценку стандартного отклонения, чем формула с n в знаменателе. А если сделан один опыт, в формуле (11) получается «ноль, деленный на ноль»: и это напоминает нам о невозможности вычислить стандартное отклонение по результатам единственного измерения.

Рассмотрим пример расчета. Измеряя время движения тела по наклонной плоскости, школьник получил результаты: 7, 5, 4, 5, 6, 3 секунды. Среднее время:

$$\frac{7+5+4+5+6+3}{6}\,\text{с} = \frac{30}{6}\,\text{с} = 5{,}0\,\text{с}.$$

Стандартное отклонение:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(7-5)^2+(5-5)^2+(4-5)^2+(5-5)^2+\ldots}{6-1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2^2+0+1^2+0+1^2+2^2}{5}} = \sqrt{\frac{10}{5}} =$$

$$= \sqrt{2} = 1{,}4\,.$$

Итак, время равно $(5{,}0 \pm 1{,}4)$ с. Отметим, что в промежуток от $(5{,}0-1{,}4)$ с до $(5{,}0+1{,}4)$ с, т. е. от 3,6 до 6,4 с, попадают не все результаты измерений, а только 4 из 6 (результаты 3 и 7 с лежат вне этого промежутка). Этого и следовало ожидать: около 2/3 опытов должно попасть в промежуток от $x_0-\sigma$ до $x_0+\sigma$.

Выводы. Среднее значение x_0 и стандартное отклонение σ можно легко вычислить по результатам нескольких измерений.

Результат единственного измерения не позволяет определить стандартное отклонение.

О «слишком точных» измерениях

При обработке результатов опыта самое главное не в том, чтобы знать формулы, а в том, чтобы правильно и вдумчиво их применить. Рассмотрим простой случай. Ученик измерил длину карандаша линейкой с миллиметровыми делениями и получил результаты: 145, 145, 145, 145, 145 мм. Подставив эти числа в формулы (10) и (11), он вычислил: $x_0=145$ мм, $\sigma=0$. Неужели его результат действительно не содержит погрешностей? Конечно, содержит. Их вносит, например, измерительный прибор, в данном случае линейка. Погрешность измерений на линейке, как правило, не меньше, чем 0,5 мм. Поэтому правильный результат $(145 \pm 0{,}5)$ мм или даже (145 ± 1) мм.

Выводы. Погрешность результата измерений не может быть меньше, чем погрешность измерительного прибора.

Как проводить опыты и описывать их результаты

Понятно, что каждое измерение нужно повторять несколько раз и из результатов вычислять среднее значение x_0 и стандартное отклонение σ. Очень важно тщательно записывать все условия опыта, даже те, которые на первый взгляд могут показаться ненужными.

Сравнивая результаты разных опытов (свои с чужими или свои новые со своими старыми данными), учитывают их стандартные отклонения. Если различие между результатами не превышает суммы стандартных отклонений, то результаты считают согласующимися.

Когда результаты не согласуются, то есть различие между ними больше, чем удвоенная сумма стандартных отклонений, нужно искать причину различия и прежде всего обратить внимание на возможные систематические погрешности: еще раз проверить точность всех приборов, продумать всю последовательность измерений и обработки данных. Полезно попытаться изменить постановку опыта, чтобы исключить влияние систематических погрешностей. Никакого общего рецепта здесь дать нельзя, успех работы зависит от самокритичности и интуиции исследователя. Если не удается объяснить различие данных грубыми систематическими погрешностями (использованием кривых линеек, неправильным считыванием показаний приборов), то начинается самое интересное — поиск более глубоких причин. Приходится очень тщательно анализировать все отличия в постановке разных опытов. При подозрении, что какой-то фактор может существенно влиять на результаты и приводить к систематическим отклонениям (например, влажность или температура воздуха, время суток и года, происхождение объекта исследования), нужно провести контрольные опыты (при различных значениях влажности, в разное время, на разных объектах и т. п.), чтобы подтвердить свое предположение или отбросить его.

Иногда случается, что все разумные предположения не могут объяснить расхождение данных разных опытов. Можно подумать, что в опытах возникли новые вещества, проявились неизвестные ранее законы природы.

Нащупать такую ситуацию — мечта каждого исследователя. Но чтобы сделать правильные выводы, нужно быть полностью уверенным в точности измерений. Например, в 1893—1894 гг. Рэлей исследовал плотность газообразного азота, полученного разными способами, и нашел, что азот из воздуха тяжелее, чем азот, выделившийся при разложении химических соединений. Плотность была равна (в некоторых единицах) 2,310 и 2,300 соответственно. Различие невелико, меньше, чем 0,5% от каждой из величин, но при тех стандартных отклонениях 0,001 и 0,0001, которые удалось получить, различие оказалось значимым — более $2\cdot(\sigma_1+\sigma_2)$. Эти результаты натолкнули на мысль о том, что в воздухе, очищенном от кислорода, есть не только азот, но и более тяжелый газ. Проверка этого предположения привела к открытию аргона.

Наконец, описывая опыты, следует точно указывать, в каких условиях они были выполнены. Это нужно для того, чтобы опыты можно было повторить в других лабораториях. В современной науке принято верить только воспроизводимым результатам, особенно если речь идет о новых законах природы.

Выводы. Опыты нужно повторять. Определить погрешность результата не менее важно, чем получить сам результат. Достоверное различие новых и старых данных может указать на новые законы природы. Вам поверят только в том случае, если результаты удастся воспроизвести в других лабораториях.

Как нужно вычислять

Школьники привыкли к точным вычислениям. Это иногда приводит к ненужному усложнению расчета, делает его долгим и трудным. Обиднее всего, если в конце приходится округлять результат и отбрасывать много лишних цифр.

Чтобы избежать потерь времени, полезно заранее, до получения ответа, оценить погрешность, с которой он будет вычислен. В пределах этой погрешности можно округлять некоторые числа в промежуточных расчетах. Например, если нужно умножить 16 на 5987 и известно, что результат будет иметь погрешность не менее 5%, то можно умножать 16 на 6000 (это гораздо легче, а

ошибка округления составляет около 0,2% и не искажает результат).

При вычислении погрешностей излишняя точность просто мешает. Например, если ширина прямоугольника $(17{,}6\pm0{,}1)$ м, а длина $(46{,}4\pm0{,}2)$ м, то относительная погрешность вычисления площади равна $0{,}1/17{,}6+$ $+0{,}2/46{,}4$. Если приводить дроби к общему знаменателю, получится величина 51/5104, которую потом придется умножать на величину площади, чтобы получить абсолютную погрешность. Это долго и не нужно. Грубо оценить погрешности можно так:

$$\frac{0{,}1}{17{,}6}+\frac{0{,}2}{46{,}4}=\frac{1}{176}+\frac{1}{232}\cong\frac{1}{200}+\frac{1}{200}=\frac{1}{100}\doteq 1\,\%.$$

Более точное вычисление: $0{,}57\%+0{,}43\%=1\%$ (тот же результат). Величина площади $17{,}6\cdot46{,}4=816{,}64$ м^2 имеет погрешность 8 м^2, поэтому результат можно округлить до (817 ± 8) м^2. Значит, сотые доли квадратного метра можно было не вычислять, но десятые доли были нужны для правильного округления (не зная их, мы получим (816 ± 8) м^2, что, впрочем, тоже не очень плохо при таких погрешностях).

Для малых величин $0<\Delta\ll1$ справедливы следующие приближенные равенства:

$$(1+\Delta)^2\cong1+2\Delta, \tag{12}$$

$$(1-\Delta)^2\cong1-2\Delta, \tag{13}$$

$$\sqrt{1+\Delta}\cong1+\frac{\Delta}{2}, \tag{14}$$

$$\sqrt{1-\Delta}\cong1-\frac{\Delta}{2}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{1+\Delta}\cong1-\Delta, \tag{16}$$

$$\frac{1}{1-\Delta}\cong1+\Delta. \tag{17}$$

Погрешности всех этих равенств имеют порядок Δ^2, это очевидно в (12) и (13). То есть если $\Delta\cong1\%$, то ошибка, которую вносят упрощенные вычисления по формулам (12)—(17), не превышает 0,1%.

Пример расчета. $\sqrt{98}=\sqrt{100-2}=10\cdot\sqrt{1-\frac{2}{100}}\cong$ $\cong 10\cdot(1-2/200)=9{,}9$. Проверим, сколь велика ошибка вычислений: $9{,}9^2=(10-0{,}1)^2=10^2-2\cdot10\cdot0{,}1+0{,}1^2=$ $=100-2+0{,}01=98{,}01$. Ошибка меньше, чем 0,1%.

Выводы. Заранее оценив погрешность результата, можно облегчить вычисления.

Практические занятия

Имея часы с секундной стрелкой, можно поставить опыт по влиянию физических упражнений на работу сердца. Измерьте свой пульс, затем сделайте 10 приседаний и снова измерьте пульс. Через несколько минут повторите опыт. Числа получатся немного другие. Усреднив результаты нескольких измерений, можно оценить, на сколько ударов в минуту стал чаще пульс в результате нагрузки, вычислить, во сколько раз или на сколько процентов увеличилась его частота. Нетрудно провести физиологическое исследование, чтобы получше узнать свой организм: какие нагрузки для вас незаметны (пульс не меняется), какие велики (пульс больше 100 ударов в минуту), сколько времени нужно вам для отдыха (частота пульса возвращается к исходной). Эта простая работа требует вычисления средних значений и стандартных отклонений, по крайней мере, для двух величин (пульс до и после нагрузки).

Более сложной является работа по измерению плотности разных веществ. Действительно ли дерево легче железа, медь тяжелее алюминия и дерево становится легче, когда высыхает? Добавьте к этим простым вопросам слова «и во сколько раз?» и вы получите тему простой практической работы. Для нее нужны весы (желательно с точностью не ниже 0,01 г, в школе такие весы найти можно), линейка с миллиметровыми делениями и образцы для исследования — кусочки проволоки и веток. Массу образца определим взвешиванием, длину и диаметр измерим линейкой, плотность вычислим по формуле

$$\rho=\frac{m}{V}=\frac{m}{\frac{\pi d^2}{4}\cdot l}=\frac{4m}{\pi\cdot d^2\cdot l},$$

где ρ — плотность; m — масса; V — объем; l — длина; d — диаметр. Нужно измерить каждую из величин m, d, l несколько раз (например, пять раз), вычислить средние значения и стандартные отклонения по формулам (10) и (11), затем оценить относительную погрешность измерения плотности:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho}\cong\frac{\Delta m}{m}+\frac{2\Delta d}{d}+\frac{\Delta l}{l}.$$

Нетрудно понять, что относительная погрешность измерения диаметра удваивается, так как диаметр нужно возводить в квадрат (подставим в формулы (2.4) и (2.5) значения x=y). Для определения плотности одного образца нужно провести 15 измерений (три величины, для каждой — пять измерений). Чтобы установить, во сколько раз дерево легче железа, необходимо сделать 30 измерений. Полезно проанализировать измерения, чтобы установить, какая величина дает наибольший вклад в погрешность определения плотности.

Задачи

1. Переписать с нужным количеством значащих цифр: длина проволоки (46,5±0,18567) см; рост человека (167,3864±1) см.
2. Толщина хвоста одной ящерицы (7,8±10) мм, а другой — (8,1±0,2) мм. Можно ли утверждать, что у первой ящерицы хвост тоньше?
3. Вес пустого бидона (815±5) г, вес масла 1000±±20 г. Сколько весит бидон с маслом?
4. Рюкзак вожатого весит (35±5) кг, рюкзак школьника (15±5) кг. На сколько тяжелее рюкзак вожатого?
5. Длина картофельного поля равна (30±1) м, а ширина (20±1) м. Найти площадь поля.
6. Тело прошло (80,0±0,2) м за (4,0±0,1) с. Найти скорость тела. Которая из измеренных величин дает больший вклад в погрешность?
7. Толщина 100 листов бумаги (1,12±0,02) см. Найти толщину одного листа бумаги.
8. Диаметр окружности равен (12,5±0,5) см. Найти длину окружности, зная, что $\pi=3{,}1415926$.
9. Радиус круга равен (1,0±0,05) м. Найти площадь круга.

10. Кубик из алюминия плотностью (2700 ± 2) кг/м^3 погружен в воду плотностью (1000 ± 1) кг/м^3. Длина ребра куба 25 ± 1 м. Найти силу Архимеда и вес кубика в воде, если $q = (9{,}80 \pm 0{,}01)$ м/с^2. Определить, какая из величин дает наибольший вклад в погрешность результата.

11. В цилиндрическом сосуде диаметром $(12{,}5 \pm \pm 0{,}5)$ см приготовили раствор соли. Масса растворенной соли $(16{,}5 \pm 0{,}1)$ г. Высота слоя раствора (180 ± 2) мм. Найти концентрацию раствора, считая, что его плотность не отличается от плотности воды.

12. Пульс космонавта до упражнения на тренажере составлял 63, 62, 64, 62, 61 удар в минуту, после упражнения — 97, 98, 96, 94, 91 удар в минуту. На сколько ударов в минуту увеличилась частота пульса? Во сколько раз изменилась частота пульса?

13. Для определения плотности древесины взяли полено, диаметр которого измерили пять раз и получили: 68, 72, 69, 76, 65 мм. Длина полена по результатам пяти измерений составила 384, 390, 396, 383, 387 мм. Массу полена измерили также пять раз: 1110, 1120, 1130, 1115, 1100 г. Найти плотность древесины. Указать, которая из измеренных величин дает наибольший вклад в погрешность результата.

14. Студент, определяя ускорение свободного падения g, измерил время падения камня t с высоты h пять раз: $h = 14{,}1$; $14{,}2$; $14{,}0$; $14{,}1$; $14{,}1$ м; $t = 1{,}7$; $1{,}8$; $1{,}7$; $1{,}6$; $1{,}7$ с. Какое значение g получил студент из этих результатов? Которая из измеренных величин вносит больший вклад в погрешность результата?

15. Имеются два ящика дроби. Размеры наугад взятых дробинок из первого ящика: 2,9; 3,2; 2,7; 3,4; 2,8; 3,1 мм; из другого ящика: 3,2; 3,4; 3,5; 3,7; 3,3; 3,6 мм. Можно ли утверждать, что дробь в обоих ящиках одного размера?

16. Приведем результаты опытов Рэлея (по кн.: Дж. Тьюки. Анализ результатов наблюдений. М.: Мир, 1981. С. 66—67). Рэлей измерял вес одного и того же объема газа и получил следующие значения. Для азота из воздуха: 2,31017; 2,30986; 2,31010; 2,31001; 2,31024; 2,31030; 2,31028. Для азота, полученного при разложении химических веществ: 2,30143; 2,29816; 2,30182; 2,29890; 2,29889; 2,29940; 2,29849; 2,29889. Рассчитайте средние значения веса азота из воздуха и из химических веществ, а также стандартные отклонения. Сравните их с числами, приведенными на с. 18. Обоснован ли вывод Рэлея?

17. Вычислить: $\sqrt{102}$; $\sqrt{600}$; $\sqrt{888}$; $\sqrt{414}$. Вычислить 1000/1001; 10/99; 50/103; 4/99.

Указания и решения. Ответы к задачам

1. $(46{,}5 \pm 0{,}2)$ см; (167 ± 1) см.

2. Прежде всего нужно перейти к абсолютной погрешности. Величины $(7{,}8 \pm 0{,}8)$ мм и $(8{,}1 \pm 0{,}2)$ мм неразличимы. Это легко увидеть, изобразив соответствующие интервалы на числовой оси.

3. (1815 ± 25) г.

4. Перейдя к абсолютным погрешностям, получим вес рюкзака школьника $(15 \pm 0{,}75)$ кг. Рюкзак вожатого на (20 ± 6) кг тяжелее.

5. 600 м$^2 \pm 8{,}3\% = (600 \pm 50)$ м^2.

6. $(20{,}0 \pm 0{,}5)$ м/с. Погрешность измерения времени в 10 раз больше, чем погрешность измерения расстояния.

7. Поскольку число 100 известно точно, относительная погрешность толщины 1 листа бумаги такая же, как для 100 листов.

8. Погрешность, с которой дано число π, настолько мала, что π можно считать точно известным числом. Относительная погрешность длины окружности такая же, как и диаметра.

9. В формулу (2.4) или (2.5) подставьте $x = y = R$, $(3{,}14 \pm 0{,}31)$ м^2 следует округлить до $(3{,}1 \pm 0{,}3)$ м^2.

10. Относительная погрешность объема 12% дает наибольший вклад в погрешность результата. Сила Архимеда $(0{,}15 \pm 0{,}02)$ Н, вес кубика в воде $(0{,}26 \pm 0{,}04)$ Н.

12. Пульс до упражнения $(62{,}4 \pm 1{,}1)$ уд/мин; после упражнения $(95{,}2 \pm 2{,}8)$ уд/мин; увеличение на $(32{,}8 \pm \pm 3{,}9)$ округляем до (33 ± 4) уд/мин. Частота пульса увеличилась в $(1{,}53 \pm 0{,}06)$ раз.

13. Диаметр (70 ± 4) мм; длина (388 ± 5) мм; масса (1115 ± 11) г. Погрешность определения диаметра дает наибольший вклад. Плотность равна $(0{,}75 \pm 0{,}10)$ г/см$^3 = (750 \pm 100)$ кг/м^3.

14. Высота $(14,1\pm0,07)$ м, время $(1,7\pm0,07)$ с. Ускорение свободного падения $(9,75\pm0,08)$ м/с. Наибольший вклад от погрешности измерения времени.

15. Размеры дроби $(3,02\pm0,25)$ мм и $(3,45\pm0,19)$ мм неразличимы, поскольку разность средних значений 0,43 мм равна сумме стандартных отклонений.

16. $(2,31014\pm0,00014)$ и $(2,29950\pm0,00136)$. Разность средних значений 0,01064 в 7 раз больше, чем сумма стандартных отклонений, которая равна 0,00150. Выводы очень хорошо обоснованы.

17. Представьте числа в виде: $102=100+2$; $600=625-25$; $888=900-12$; $414=400+14$; $1001=1000+1$ и т. д. Пример расчета: $\sqrt{888}=\sqrt{900-12}=30\cdot\sqrt{1-1/75}\cong 30\cdot(1-1/150)=30-1/5=29,8$. Проверка: $29,8^2=(30-0,2)^2=30^2-2\cdot30\cdot0,2+0,2^2=900-12+0,04=888,04$.

$$\frac{1000}{1001}=\frac{1000}{1000}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{1000}}=1-\frac{1}{1000}=0,999\,.$$

А. Н. Горбань

ЛЕКЦИИ О ГАЗОВЫХ ЗАКОНАХ

Идеальный газ

Идеальным полагаем такой газ, в котором любая частица (молекула) большую часть времени движется практически равномерно и прямолинейно, вступая изредка в кратковременные столкновения с другими частицами.

Для идеального газа уравнение состояния таково:

$$pV=\frac{m}{\mu}RT, \tag{1}$$

где p — давление (Па=Н/м^2=Дж/м^3); V — объем, м^3; m — масса, кг; μ — молекулярная масса, кг/моль; m/μ — число молей; R — универсальная газовая постоянная, $R=8,31$ Дж/моль·К; T — абсолютная температура, К.

В одном моле содержится $N_A=6,02\cdot10^{23}$ частиц. В уравнении состояния можно использовать не число молей m/μ, а число частиц $N=N_Am/\mu$. Тогда

$$pV=NkT, \tag{2}$$

где $k=\dfrac{R}{N_A}=1,38\cdot10^{-23}$ Дж/К — постоянная Больцмана.

Эти уравнения, величины и их размерности должен знать каждый.

Одна частица, движущаяся по отрезку и упруго отражающаяся от ограничителей на его концах (рис. 1), дает хорошую модель для понимания процессов в идеальном газе. Основные величины: «объем» — длина отрезка l (м); внутренняя энергия U равна кинетической, $U=\dfrac{mv^2}{2}$ (Дж); m — масса частиц, v — скорость; температура T определяется через кинетическую энергию; $1/2\ kT$ — средняя кинетическая энергия на одну поступательную степень свободы. В обычном трехмерном пространстве таких степеней свободы на одну частицу приходится 3. Для рассматриваемой частицы на отрезке — всего одна. Для одной частицы с одной степенью свободы полагаем

$$\frac{1}{2}kT = \frac{mv^2}{2};\ kT = mv^2;\ T = \frac{mv^2}{k}. \qquad (3)$$

«Давление» F — величина постоянных сил, которые должны быть приложены к ограничителям на концах отрезка, чтобы не давать им разъезжаться под действи-

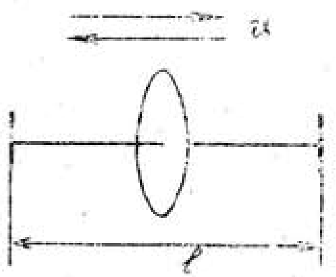

Рис. 1

ем ударов частицы. Для отыскания F надо усреднить силу, возникающую во время удара, по отрезку времени между ударами:

$$F = \frac{\text{величина изменения импульса за 1 удар}}{\text{время между ударами}}.$$

За 1 удар скорость частицы меняет знак: из $|v|$ становится $-|v|$ или обратно. Изменение импульса равно $\pm 2m|v|$, время между ударами $\tau = 2l/|v|$,

$$F = \frac{2m\,|v|}{\tau} = \frac{mv^2}{l} \quad \left(Н = \frac{Дж}{м}\right). \qquad (4)$$

Обратите внимание: размерность обычного трехмерного давления есть Н/м², она совпадает с размерностью плотности энергии Дж/м³, размерность давления для одномерной модели (частица на отрезке) есть Н, она совпадает с размерностью линейной плотности энергии Дж/м.

В термодинамике разделяют передачу тепла и совершение работы. В рассматриваемой простой модели также можно попытаться их разделить. Для этого рассмотрим различные движения ограничителей («стенок»). Если величина скорости движения ограничителей в некотором процессе много меньше величины скорости частицы $|v|$ и очень медленно меняется, то в нем совершается работа, но не передается тепло (адиабатический процесс). Если же, напротив, скорость движения ограничителя может быть сравнима с $|v|$, но меняется так, что его перемещение даже за большое время пренебрежимо мало по сравнению с l, то в таком процессе не совершается работа, но может передаваться тепло (представить это можно так: ограничители вибрируют около своих положений, сталкиваясь с ними, частица меняет скорость).

В определение адиабатичности входит словосочетание «медленно меняется». Здесь оно означает, что за время между двумя ударами скорость ограничителя, как правило, меняется мало по сравнению со своей величиной; если же и бывают моменты резкого (скачкообразного) увеличения или уменьшения этой скорости на значительную величину, то между этими моментами происходит много ударов.

Для любого процесса совершенная системой работа A, переданное ей тепло Q и изменение внутренней энергии ΔU связаны соотношением

$$Q = A + \Delta U. \qquad (5)$$

Найдем для частицы на отрезке важные величины теплоемкости. Теплоемкость — количество тепла, которое нужно сообщить системе при заданных условиях, чтобы нагреть ее на 1 градус. Она зависит от условий и различна для процессов при постоянном объеме и постоянном давлении.

При постоянном «объеме» (длине отрезка l) система не совершает работу, поэтому при таком условии $Q = \Delta U$. В силу связи энергии с температурой для нашей системы (3)

$$\Delta U = \frac{1}{2}k\Delta T, \quad \frac{Q}{\Delta T} = \frac{1}{2}k. \qquad (6)$$

Теплоемкость при постоянном объеме c_v на одну частицу с одной степенью свободы равна $1/2k$.

При постоянном давлении система, нагреваясь, расширяется и совершает работу $A = F\Delta l$, где Δl — увеличение длины; F — постоянное давление. Величину Δl найдем из условия постоянства давления: $F = \frac{mv^2}{l} = \text{const}$ (см. (4)), но $mv^2 = kT$ (на одну поступательную степень свободы приходится кинетическая энергия kT). Отсюда $\frac{kT}{l}=F=\text{const}$, то есть $l=\frac{kT}{F}$, $\Delta l=\frac{k\Delta T}{F}$,

$$Q=k\Delta T+\Delta U=k\Delta T+\frac{1}{2}k\Delta T=\frac{3}{2}k\Delta T,$$

$$\frac{Q}{\Delta T}=\frac{3}{2}k. \qquad (7)$$

Теплоемкость при постоянном давлении c_p на одну частицу с одной степенью свободы равна 3/2k, $c_p-c_v=k$.

Что сохраняется при адиабатических процессах? Сразу дадим ответ: в идеальном газе при адиабатическом процессе

$$PV^{\frac{C_p}{C_v}}=\text{const}, \qquad (8)$$

где c_p — теплоемкость при постоянном давлении; c_v — теплоемкость при постоянном объеме. Для нас в общем случае c_v — табличная величина. Вычислять ее в сложных ситуациях не будем.

В расчете на одну частицу в газе $c_p-c_v=k$ (уравнение Майера).

Для рассматриваемой модельной системы (одна частица на отрезке) $c_p=3/2k$, $c_v=1/2k$, $c_p/c_v=3$, и равенство (8) принимает вид

$$Fl^3=\text{const}.$$

Докажем его. Рассмотрим плоскость с координатами x, v (x — координата частицы на прямой; v — ее скорость, положительным для которой считается направление возрастания x). Изобразим на плоскости, как движется частица (рис. 2). Получим прямоугольник со сторонами $2|v|$, l. При адиабатическом процессе, например при сжатии, одна сторона этого прямоугольника (l) уменьшается, другая ($2|v|$) увеличивается. Скорость растет от столкновений с движущейся навстречу частице стенкой. При расширении — наоборот. Площадь этого прямоугольника $2l|v|$ при всех адиабатических процессах не меняется.

Докажем это. Пусть первый ограничитель (с координатой l) движется со скоростью w — малой и медленно меняющейся так, чтобы на протяжении времени Δt ее можно было считать постоянной, а за это время произошло бы достаточно много ударов.

По определению скорости $l=w\Delta t$ (положительно направление скорости направо). После налетания со скоростью v на стенку, движущуюся со скоростью w, частица отскакивает со скоростью $-(v-2w)$ (рис. 3). Чтобы показать это, надо перейти в систему отсчета стенки, рассмотреть в ней упругое отражение от неподвижной стенки, а потом вернуться в исходную систему.

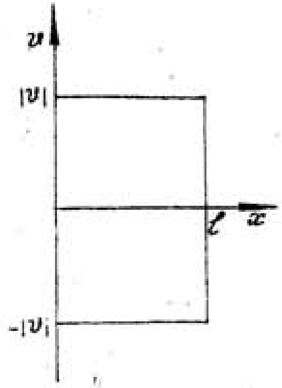

Рис. 2

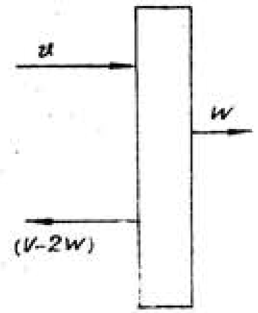

Рис. 3

Число ударов n за время Δt найдем, считая изменение малым:

$$n\approx\frac{\Delta t}{\tau}=\frac{\Delta t\,|v|}{2l}.$$

Изменение $|v|$ $\Delta|v|=-2wn\approx-\frac{w\Delta t}{l}|v|=-\frac{\Delta l}{l}|v|$.

Для изменения $l|v|$ получаем

$$(|v|+\Delta|v|)(l+\Delta l)-|v|l=|v|\Delta l+l\Delta|v|+$$
$$+\Delta l\Delta|v|=|v|\Delta l-|v|\Delta l-\frac{|v|}{l}(\Delta l)^2.$$

Кажется, приращение $l|v|$ равно $\frac{|v|}{l}(\Delta l)^2$, пропорционально $(\Delta l)^2$. Однако мы уже пренебрегали величинами столь малыми, когда при вычислении числа ударов считали скорость v постоянной. Пренебрегая такой величиной и здесь, получаем $\Delta(l|v|)=0$, площадь постоянна.

Чтобы перейти от $|v|$ к давлению, заметим, что из постоянства $l|v|$ следует $v^2l^2=\text{const}$. Поскольку $v^2=\frac{Fl}{m}$ и $m=\text{const}$, $Fl^3=\text{const}$.

Остается вопрос: почему при вычислении малых приращений функции можно пренебрегать слагаемыми, пропорциональными квадрату (или более высокой степени) малого приращения аргумента (Δx)? Ответ таков: потому что при этом относительная погрешность мала — она стремится к нулю вместе с Δx (о погрешностях см. лекции А. О. Ганаго). Можно провести и более подробное рассуждение.

Пусть на отрезке [a, b] задана функция $f(x)$ и для любых x, $x+\Delta x$ из этого отрезка $\Delta f=f(x+\Delta x)-f(x)=g(x)\Delta x+\varphi(x, \Delta x)(\Delta x)^2$ (как и было в разобранном примере). Здесь величина φ зависит от двух аргументов — x, Δx. Для нас важно только одно ее свойство — ограниченность: существует такое число $M>0$, что для любых x, Δx выполнено $|\varphi|<M$.

Разобьем [a, b] на некоторое число n отрезков длиной $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. Оценим ошибку приближенной формулы:

$$f(b)-f(a)\approx g(a)\Delta x+g(a+\Delta x)+\ldots+ \\ +g(a+(n-1)\Delta x)\Delta x. \qquad (9)$$

Точное значение $f(b)-f(a)$ равно

$$g(a)\Delta x+\varphi(a, \Delta x)(\Delta x)^2+g(a+\Delta x)\Delta x+\varphi(a+\Delta x, \Delta x)\times \\ \times(\Delta x)^2+\ldots+g(a+(n-1)\Delta x)\Delta x+\varphi(a+(n-1)\Delta x)(\Delta x)^2.$$

Для ошибки формулы (9) получаем

$$|\varphi(a, \Delta x)(\Delta x)^2+\varphi(a+\Delta x, \Delta x)(\Delta x)^2+\ldots+ \\ +\varphi(a+(n-1)\Delta x, \Delta x)(\Delta x)^2|=(\Delta x)^2|\varphi(a, \Delta x)+\ldots+ \\ +\varphi(a+(n-1)\Delta x, \Delta x)|\leqslant(\Delta x)^2nM=M(b-a)\Delta x.$$

При уменьшении Δx ошибка стремится к нулю.

Таким образом, если вычислять конечное приращение функции $f(b)-f(a)$ как сумму малых приращений Δf при малых приращениях аргумента Δx, то в Δf можно пренебрегать слагаемыми, малыми по сравнению с Δx (отношения которых к Δx стремятся к нулю при уменьшении Δx).

Идеальный газ и первый шаг в сторону неидеальности

Уравнение состояния идеального газа

$$pV=N_{моль}RT \quad \text{или} \quad pV=N_{частиц}kT \qquad (10)$$

содержит почти всю информацию о газе.

Внимание! Это уравнение для объема, давления, числа молей (или частиц) и температуры не зависит от того, какой именно газ им описывается: водород, кислород, азот, пары воды. Важно, чтобы он был достаточно разреженным, температура достаточно малой, и можно было считать его идеальным. Обычная форма уравнения Клапейрона-Менделеева $pV=\frac{m}{\mu}RT$ содержит молекулярный вес μ — индивидуальную характеристику вещества.

Важной характеристикой каждого идеального газа является зависимость его внутренней энергии от температуры. От числа частиц внутренняя энергия U зависит просто: поскольку в идеальном газе энергия взаимодействия частиц пренебрежимо мала, внутренняя энергия есть сумма энергий частиц. Если все частицы одинаковы (простое вещество), то имеет место пропорциональность

$$U=N_{моль}u(T), \qquad (11)$$

где $u(T)$ (Дж/моль) — зависимость внутренней энергии одного моля от температуры.

Другая форма записи:

$$U=N_{частиц}\tilde{u}(T), \qquad (12)$$

где $\tilde{u}(T)$ — зависимость средней энергии на одну частицу от температуры, $\tilde{u}(T)=u(T)/N_A$.

Если частицы обладают только тремя поступательными степенями свободы (нет ни вращательных, ни колебательных), то средняя энергия на частицу есть 3/2kT (по 1/2kT на степень свободы). Это с хорошей точностью верно для одноатомных газов. Для них

$$U=N_{частиц}\,3/2kT=N_{моль}3/2RT. \qquad (13)$$

Конечно, три поступательных степени свободы имеет молекула любого газа, не только одноатомного, поэтому для любого идеального газа

$$U\geqslant N_{частиц}3/2kT, \qquad (14)$$

или, что то же самое, $U\geqslant N_{моль}3/2RT$.

Внутренняя энергия газа довольно велика. Так, в одном литре (10^{-3} м^3) идеального газа при $T=300$ K (27 °C) и $p=10^5$ Па содержится $\frac{PV}{RT}=0{,}4$ моля. Его внутренняя энергия

$$U \geqslant N_{\text{моль}} 3/2RT = 1500 \text{ Дж}. \qquad (15)$$

А 1500 Дж достаточно, чтобы поднять 100 кг на высоту 1,5 м. Однако черпать эту энергию из окружающей среды невозможно (по крайней мере, если она однородна).

Хорошим приближением для функций $u(T)$ на не слишком больших интервалах температур (для кислорода, азота, водорода — порядка сотни градусов) является линейная зависимость

$$u(T)=u_0+c_vT, \text{ а также } \tilde{u}(T)=\tilde{u}_0+\frac{c_v}{N_A}T.$$

Здесь c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме на моль газа, она имеет размерность $\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}$. Эта величина показывает, сколько тепла надо сообщить 1 молю газа при постоянном объеме (тогда работа системы равна нулю и $Q=\Delta U$), чтобы нагреть его на один К.

Для идеального газа

$$c_v \geqslant \frac{3}{2}R \simeq 12{,}5 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}.$$

Это еще одно выражение неравенства (15). Удельная теплоемкость (на моль газа) при постоянном давлении c_v — индивидуальная характеристика газа. Столь же индивидуальна теплоемкость при постоянном давлении c_p. А вот их разность определяется только свойством идеальности для всех идеальных газов:

$$c_p - c_v = R\left(= 8{,}31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{K}}\right). \qquad (16)$$

Докажем это. Пусть 1 моль газа нагревается при постоянном давлении, он расширяется, совершая работу $A=p\Delta V$. По первому закону термодинамики

$$Q=A+\Delta U.$$

Величина ΔU равна $c_v\Delta T$ (для одного моля, для N было бы $\Delta U=Nc_v\Delta T$). Величина p постоянная поэтому $p\Delta V$ равно приращению pV, которое по уравнению состояния есть $N_{\text{молей}}R\Delta T=R\Delta T$ (так как $N_{\text{моль}}=1$). Отсюда

$$A=R\Delta T; \quad Q=R\Delta T+c_v\Delta T=(c_v+R)\Delta T;$$

$$c_p=\frac{Q}{\Delta T}=c_v+R,$$

что доказывает требуемое соотношение (16).

Итак, описаны два универсальных соотношения: уравнение состояния (10) и его следствие (16).

Полезна приближенная формула для газа с двухатомными молекулами (азота, кислорода) при нормальных условиях или близких к ним $c_v=1/2R$ (наряду с тремя поступательными степенями свободы учтено 2 вращательных, колебаниями пренебрегаем), для трехатомного (также пренебрегаем колебаниями) $c_v=6/2R=3R$.

Увы, реальные газы не вполне идеальны. Они сжижаются при понижении температуры, при высоких плотностях давление с ростом плотности увеличивается быстрее, чем это предписывается законом идеального газа $\left(p=\frac{1}{\mu}\frac{mRT}{V}\right)$, не как линейная функция.

Что надо учесть? По крайней мере, два обстоятельства. При сближении молекул на малое расстояние они отталкиваются, можно приближенно описать это наличием такого расстояния, ближе которого они друг к другу не могут подойти. Кроме того, на не столь малых расстояниях между молекулами действуют силы притяжения.

Учет собственного объема молекулы очень прост. Продемонстрируем это с помощью «1 частица на отрезке». Пусть частица имеет конечную величину (длину) r и упруго отражается от правого ограничителя тогда, когда с ним сталкивается ее правый конец, а от левого — когда с ним сталкивается ее левый конец (рис. 4). Тогда время между ударами $\tau=\frac{2(l-r)}{|v|}$ и давление

$$F=\frac{\text{изменение импульса за один удар}}{\text{время между ударами}}=\frac{2mv}{\tau}=\frac{mv^2}{l-r}.$$

Так как по-прежнему $kT = mv^2$, то для одной степени свободы получаем

$$F(l - r) = kT. \quad (17)$$

Давление множится на «свободный объем» — часть отрезка, не занятую частицей.

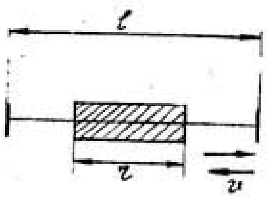

Рис. 4

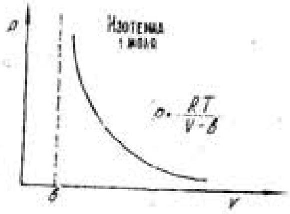

Рис. 5

Совершенно так же в трехмерном случае (обычный газ) учет собственного объема частиц дает (рис. 5):

$$p(V - N_{частиц}b_0) = N_{частиц}kT, \text{ или}$$

$$p(V - N_{моль}b) = N_{моль}RT, \quad (18)$$

где $b = N_A b_0$ — объем, «исключаемый из области свободного движения» при добавлении в систему 1 моля газа, а b_0 — при добавлении 1 частицы. В рамках (18) можно полагать, что $N_A b_0$ — минимальный возможный объем 1 моля, однако это не совсем так: при высоких плотностях применимость (18) для трехмерного газа твердых шаров нарушается. Это можно легко понять без выкладок. Проведем мысленный эксперимент. Пусть в ящике до краев плотно и аккуратно уложены шары. Высыпем шары и насыпем обратно. В ящик войдут не все шары. Итак, число шаров меньше максимально возможного, но свободного их движения быть не может. Для одномерных частиц (на отрезке) подобная ситуация немыслима.

Впрочем, различие между $N_A b_0$ и минимальным объемом 1 моля для нас несущественно. Количественно эти величины одного порядка, к каким-либо важным качественным эффектам в описании газа учет этого различия не приведет.

Вывод уравнения Ван-дер-Ваальса

Учитывая отталкивание частиц в газе на малых расстояниях, в простейшем случае получим уравнение состояния

$$p(V - N_{моль}b) = N_{моль}RT. \quad (19)$$

Чтобы осмыслить его, представим себе изотерму (рис. 6). Если газ удовлетворяет уравнению (19), то его изотермы на плоскости с координатами p, V — такие же кривые, как для идеального газа, только сдвинуты вправо на величину $N_{моль}b$. Эта величина характеризует объем, меньше которого согласно (19) газ сжать нельзя.

Давление на стенку пропорционально средней кинетической энергии ударяющихся о нее частиц и их плотности у стенки. Кинетическая энергия частицы в объеме сосуда 3/2kT. Если предположить, что плотность числа частиц у границы не больше, чем внутри, а такая же или меньше (из-за притяжения это кажется очевидным), то давление должно быть меньше, чем

$$p_{ид} = \frac{N_{частиц}}{V}kT = \frac{N_{моль}}{V}RT,$$

которое дается уравнением состояния идеального газа.

Чтобы получить количественные оценки, примем очень простую модель взаимодействия. Пусть потенциальная энергия притяжения φ пары взаимодействующих

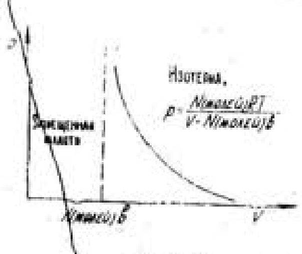

Рис. 6

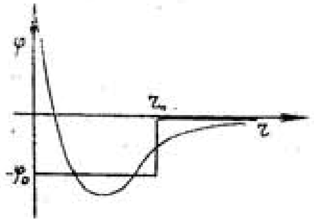

Рис. 7

частиц зависит от расстояния r между ними так, как изображено на рис. 7: при $r > r_п$ величина $\varphi = 0$, а при $r \leqslant r_п$ она отрицательна ($\varphi = -\varphi_0$). (Для притяжения потенциальная энергия при сближении частиц уменьшается, если предполагать, что на очень больших расстояниях она равна нулю, то на меньших она становится отрицательной). Кривой линией показана более реалистичная зависимость $\varphi(r)$, включающая, в частности, отталкивание на малых расстояниях. Ограничимся, тем не менее прямоугольной потенциальной ямой глубины φ_0 и радиуса $r_п$ (см. рис. 7). Объем ямы $V_п = 4/3\pi r_п^3$. Если частица находится внутри сосуда на расстоянии от стенок, большем $r_п$, то вокруг нее в шаре радиуса $r_п$ будет в среднем $n_{частиц} V_п$ молекул. Здесь мы обозначили $n_{частиц}$ плотность числа частиц (концентрацию):

$$n_{частиц} = \frac{N_{частиц}}{V}.$$

Конечно, в шаре радиуса $r_п$ бывает разное число молекул: случайно в него может попасть и больше частиц, чем $n_{частиц}V_п$, и меньше, но в среднем их будет $n_{частиц} V_п$.

Потенциальная энергия системы есть сумма потенциальных энергий взаимодействующих пар. Если предполагать, что каждая частица взаимодействует с $n_{частиц} V_п$ соседями, то потенциальную энергию притяжения можно определить как

$$W = -\frac{1}{2}\varphi_0 V_п n_{частиц}^2 V \qquad (20)$$

(число частиц $V_п n_{частиц}$, с которыми взаимодействует одна молекула, умножается на энергию притяжения φ_0, на полное число частиц $n_{частиц}V$ и делится на 2, так как каждую взаимодействующую пару посчитали дважды).

В формуле (20) неправильно учтены молекулы, расположенные вблизи границы сосуда, на расстоянии от нее, меньшем $r_п$. Они взаимодействуют с меньшим числом частиц, чем молекулы из объема (рис. 8). Однако доля таких пристеночных молекул пренебрежимо мала, если $r_п$ много меньше линейных размеров сосуда с газом. Поэтому и связанная с ними относительная ошибка формулы (20) также мала.

Давление газа с притягивающимися молекулами меньше, чем у идеального газа с той же температурой, объемом и числом частиц. На сжатие газа с притяжением между частицами требуется меньше работы. На какую величину меньше? Ровно настолько, насколько уменьшается при сжатии потенциальная энергия при-

тяжения (20). Это можно проинтерпретировать так, как будто выполняется та же работа, что и по сжатию идеального газа, но внешние силы осуществляют только часть ее, остальную работу выполняют силы притяжения. Работа сил притяжения при этом равна изменению потенциальной энергии.

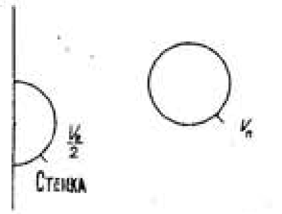

Рис. 8

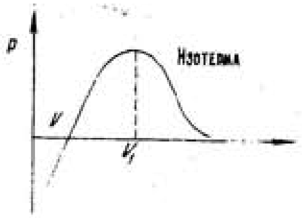

Рис. 9

При сжатии неизменно число частиц, концентрация же меняется, поэтому перепишем (20) по-другому:

$$W = -\frac{1}{2}\varphi_0 V_п \frac{N_{частиц}^2}{V} = -\frac{1}{2} N_A^2 \varphi_0 V_п \frac{N_{моль}^2}{V}. \qquad (21)$$

Работа сил давления p при малом изменении объема ΔV есть $p\Delta V$.

Найдем уменьшение давления за счет притяжения как производную W по объему:

$$p_{пр} = W'(V) = \frac{1}{2}\varphi_0 V_п \frac{N_{частиц}^2}{V^2} =$$

$$= \frac{1}{2} N_A^2 \varphi_0 V_п \frac{N_{моль}^2}{V^2}. \qquad (22)$$

Величину $1/2 N_A^2 \varphi_0 V_п$ обозначим a. Давление газа с притяжением молекул теперь запишем как

$$p = p - p_{пр} = \frac{N_{моль}}{V} RT - a\left(\frac{N_{моль}}{V}\right)^2. \qquad (23)$$

Различные варианты (23) удобны в разных случаях:

$$p = n_{моль} RT - a n_{моль}^2, \qquad (24)$$

или

$$\left(p + a\left(\frac{N_{моль}}{V}\right)^2\right) V = RTN_{моль}. \qquad (25)$$

Представим себе изотерму газа, удовлетворяющего (23)—(25) (рис. 9). При очень большом объеме слагаемое $a\left(\frac{N_{моль}}{V}\right)^2$ очень мало, намного меньше по величине, чем $RT\frac{N_{моль}}{V}$. Действительно, при увеличении V в 10 раз $\frac{N}{V}$ уменьшается в 10 раз, а $\left(\frac{N}{V}\right)^2$ в 100 раз. Если увеличить V в 100 раз, то $\frac{N}{V}$ уменьшится в 100, а $\left(\frac{N}{V}\right)^2$ в 10000 раз и т. д. Поэтому при очень больших V (25) переходит в закон идеального газа:

$$pV=N_{(моль)}RT.$$

При очень малых V, напротив, $a\left(\frac{N}{V}\right)^2$ много больше $\frac{N}{V}RT$. При V, стремящемся к нулю, pV^2 стремится к $aN_{моль}$, и можно записать

$$pV^2 \cong -aN_{моль}\ ;\ p \cong -\frac{aN_{моль}}{V^2}\ . \qquad (26)$$

При малых V давление отрицательно и стремится к минус бесконечности при V, стремящемся к нулю. Это может означать только одно—газ, удовлетворяющий (26), при сжатии ведет себя странным образом. Стоит его сжать до некоторого объема V_1, как с уменьшением объема давление начинает не расти, как мы того можем ожидать, а падать. При дальнейшем сжатии, начиная с объема V_2, давление становится отрицательным, и газ самопроизвольно сжимается в точку (объем стремится к нулю). Найдем эти характерные точки $V_{1,2}$.

Проще найти V_2, где давление обращается в 0. Воспользуемся уравнением (24) и найдем сначала $n_{моль}$:

$$p=n_{(моль)}RT-an^2_{моль}=0,\ n_{моль}=\frac{RT}{a},$$

или $$V_2=\frac{N_{моль}}{n_{моль}}=a\frac{N_{моль}}{RT}.$$

Нулевое значение n не подходит.

Для поиска того V_1, для которого давление максимально, поступим так же: сначала найдем $n_{моль}$, затем

$$V=\frac{N_{моль}}{n_{моль}}.$$

Рассмотрим функцию

$$p(n)=RTn-an^2.$$

Ее максимум достигается в точке, где производная обращается в 0:

$$p'(n)=0,\quad p'(n)=RT-2an,$$
$$RT-2an=0,$$
$$n_{моль}=\frac{RT}{2a},\quad V_1=\frac{N_{моль}}{n_{моль}}=2a\frac{N_{моль}}{RT}. \qquad (27)$$

Самопроизвольного сжатия в точку у обычного реального газа быть не должно. Можно предположить, что в модели (23)—(25) оно происходит из-за того, что мы не учли собственного объема частиц. Сама модель (23)—(25) при $V<V_2$ неприменима. Вопрос этот тонкий, но точно можно быть уверенным в одном: если учесть собственный объем, то сжатия в точку не будет.

Соединим (19) и (25), получим знаменитое уравнение Ван-дер-Ваальса:

$$\left(p+a\left(\frac{N_{моль}}{V}\right)^2\right)\cdot(V-N_{моль}b)=N_{моль}RT\ , \qquad (28)$$

или

$$(p+an^2_{моль})(1-bn_{моль})=n_{моль}RT.$$

Упражнение. Почему в одном месте от V отнято bN, а в другом (слагаемое в скобках $a\left(\frac{N}{V}\right)^2$)— нет?

Критическая точка

Уравнение Ван-дер-Ваальса имеет вид

$$\left(p+a\left(\frac{N_{моль}}{V}\right)^2\right)\cdot(V-bN_{моль})=RTN_{моль}\ . \qquad (29)$$

Первое, что полезно сделать, получив новое уравнение,— это исследовать, что оно дает в крайних случаях (что-то считаем очень большим или очень малым). Для них всегда есть надежда на упрощение, часто довольно большое. Выделим два крайних случая.

1. Объем V стремится к бесконечности, N, T=const. Заметим, что в этом случае p стремится к нулю. Действительно,

$$p = \frac{RTN_{моль}}{V - bN_{моль}} - a\left(\frac{N_{моль}}{V}\right)^2. \qquad (30)$$

Оба слагаемых в правой части стремятся к нулю при V, стремящемся к бесконечности, так как T, N, a, b постоянны.

Естественно ожидать, что при очень большом объеме выполняются с высокой точностью законы идеального газа, так как с увеличением объема частицы все большую часть времени движутся, не взаимодействуя между собой.

Рассмотрим поэтому, как ведет себя произведение pV при увеличении объема. Если оно приближается к величине $RTN_{моль}$, которая предполагается постоянной, то мы имеем право сказать, что при стремлении V к бесконечности (и фиксированных $N_{моль}$, T) уравнение Ван-дер-Ваальса переходит в уравнение состояния идеального газа. Так оно и есть:

$$pV = \frac{V}{V - bN_{моль}} RTN_{моль} - a\frac{N_{моль}^2}{V}. \qquad (31)$$

При увеличении объема, при a=const, T=const, N==const, второе слагаемое в правой части стремится к нулю. Множитель $\frac{V}{V - bV}$ в первом слагаемом можно переписать:

$$\frac{V}{V - bN} = \frac{1}{1 - b\dfrac{N}{V}}.$$

В таком виде очевидно его приближение к 1 при увеличении V.

Итак, для любых фиксированных T, $N_{моль}$ при увеличении объема уравнение Ван-дер-Ваальса переходит в уравнение состояния идеального газа

$$pV = RTN_{моль}. \qquad (32)$$

Конечно, величина объема, начиная с которого равенство (4) выполняется с некоторой заданной точностью,

зависит от T и $N_{моль}$, однако для каждых T и $N_{моль}$ такой объем существует.

2. Второй крайний случай: очень велика температура T. Воспользуемся записью (30). В правой части два слагаемых. Выясним, когда можно пренебрегать вторым. Зададимся некоторой относительной точностью δ (например 1/100). Нужно найти такое T, чтобы отношение величины второго слагаемого к первому не превосходило δ:

$$a\left(\frac{N_{моль}}{V}\right)^2 : \frac{RTN_{моль}}{V - bN_{моль}} < \delta,$$

$$T > \frac{1}{\delta}\,\frac{aN_{моль}\cdot(V - bN_{моль})}{RV^2}. \qquad (33)$$

Можно найти T, удовлетворяющее (33) при любых N, V.

Заметим, что $V > V - bN_{моль} > 0$, следовательно,

$$\frac{1}{\delta}\,\frac{N_{моль}}{RV^2} > \frac{1}{\delta}\,\frac{N_{моль}\cdot(V - bN_{моль})}{RV^2}. \qquad (34)$$

Далее, в соответствии с уравнением Ван-дер-Ваальса $V < bN_{моль}$, поэтому в знаменателе левой части (34) можно заменить V на $bN_{моль}$, увеличив тем самым дробь:

$$\frac{1}{\delta}\,\frac{aN_{моль}}{RbN_{моль}} > \frac{1}{\delta}\,\frac{aN_{моль}}{RV}. \qquad (35)$$

Из (34) и (35) заключаем: если

$$T > \frac{1}{\delta}\cdot\frac{a}{Rb}, \qquad (36)$$

то с относительной ошибкой, не превосходящей δ, можно отбросить второе слагаемое в правой части (30) и прийти к уравнению

$$p = \frac{RTN_{моль}}{V - bN_{моль}}. \qquad (37)$$

Оно описывает газ с учетом собственного объема частиц, но без их притяжения.

Рассмотрим теперь уравнение Ван-дер-Ваальса (29) при фиксированных p, T как уравнение относительно V. Раскрыв скобки, перенеся все слагаемые налево и умножив на V^2 (чтобы исключить V из знаменателя), получим кубическое уравнение

$$pV^3-(bp+RT)N_{моль}V^2+ \tag{38}$$
$$+aN^2_{моль}V-abN^3_{моль}=0.$$

Уравнение (10) при некоторых p, T имеет только один положительный корень V (например, для достаточно больших T — (30)). Для некоторых же p, T оно может иметь и три корня.

Сеть изотерм для газа Ван-дер-Ваальса имеет вид, изображенный на рис. 10. Изотермы разбиваются на две группы: монотонные и имеющие участок возрастания давления с ростом объема кривые (с волнообразной частью). Эти два типа изотерм разделяются критической изотермой, на которой есть точка с горизонтальной касательной — критическая точка. Можно сказать так: с ростом температуры $T \to T_{кр}$ немонотонная изотерма приближается к критической, а участок возрастания давления с объемом (волнообразный) сжимается при этом в критическую точку.

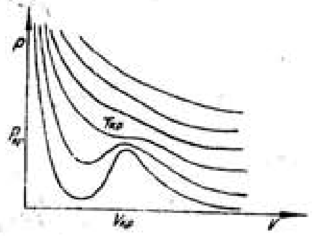

Рис. 10

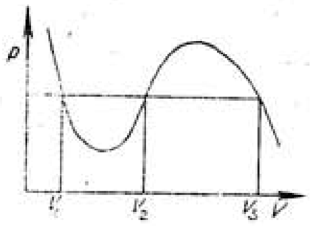

Рис. 11

Давление, температуру и объем в критической точке обозначим $p_{кр}$, $T_{кр}$, $V_{кр}$. Если $T<T_{кр}$, то для некоторых значений p существует три решения уравнения (38) — три объема (рис. 11). Когда температура приближается к критической, эти тройки объемов сближаются, сливаясь в пределе в одно значение $V_{кр}$.

Теперь немного алгебры. Кубическое уравнение $ax^3+bx^2+cx+d=0$ может иметь три корня x_1, x_2, x_3. При этом выполнено равенство

$$ax^3+bx^2+cx+d=a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

Поэтому в критической точке для уравнения Ван-дер-Ваальса имеем:

$$p_{кр}V^3-(bp_{кр}+RT_{кр})N_{моль}V^2+$$
$$+aN_{моль}V-abN^3_{моль}=p_{кр}(V-V_{кр})^3, \tag{39}$$

все три корня сливаются в один. Используем (39) для поиска значений $p_{кр}$, $T_{кр}$, $V_{кр}$. Раскроем скобки и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной:

$$p_{кр}V^3_{кр}=abN^3_{моль}, \quad 3p_{кр}V^2_{кр}=aN^2_{моль},$$
$$3p_{кр}V_{кр}=(bp_{кр}+RT_{кр})\cdot N_{моль}. \tag{40}$$

Найдем сначала $V_{кр}$, разделив первое уравнение (40) на второе:

$$\frac{1}{3}V_{кр}=\frac{abN_{моль}^3}{aN^2_{моль}}=bN_{моль}, \quad V_{кр}=3bN_{моль}.$$

Затем легко найти $p_{кр}$, $T_{кр}$:

$$p_{кр}=\frac{aN_{моль}^2}{3V_{кр}^2}=\frac{1}{27}\cdot\frac{a}{b^2}, \tag{41}$$

$$T_{кр}=\frac{1}{R}\left(\frac{3p_{кр}V_{кр}}{N_{моль}}-bp_{кр}\right)=\frac{8}{27R}\cdot\frac{a}{b}.$$

Итак, найдены координаты критической точки $p_{кр}$, $T_{кр}$, $V_{кр}$. Критическую точку можно найти экспериментально, а из нее определить a, b (если предполагать, что газ удовлетворяет уравнению Ван-дер-Ваальса).

Термодинамическая неустойчивость и правило Максвелла

Нарисуем изотермы газа Ван-дер-Ваальса $p=p(V)$ при различных температурах и заданном количестве вещества. При $T>T_{кр}$ они монотонны, давление p с ростом объема V уменьшается. Изотерма для $T=T_{кр}$ тоже монотонна, но на ней есть критическая точка с координатами $V_{кр}$, $T_{кр}$, в которой касательная к графику $p(V)$ горизонтальна. Наконец, при $T<T_{кр}$ изотермическая зависимость $p(V)$ немонотонна — есть участок, на котором с увеличением объема давление также воз-

растает. При увеличении T (но $T<T_{кр}$) этот участок возрастания давления p(V) уменьшается, при $T=T_{кр}$ сливается в критическую точку.

Покажем, что состояния, соответствующие возрастающим участкам изотермы, не могут быть реализованы. Они катастрофически неустойчивы. Если представить себе такое состояние, то окажется, что малейшее возмущение приводит к расслоению: одна часть вещества будет сжиматься, другая — расширяться.

Удобно перейти от объема к концентрации $n=N/V$, так как мы будем рассматривать неоднородную систему, а концентрация (в отличие от объема) может меняться от точки к точке. Участку возрастания изотермы p(V) соответствует убывающий участок в зависимости p(n) при данной температуре (так как n с ростом объема уменьшается, рис. 12). «Нормальными» следу-

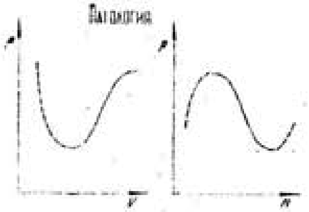

Рис. 12

Рис. 13

ет считать такие изотермические зависимости p(V), для которых p с ростом V убывает (по крайней мере, не возрастает), и такие изотермические зависимости p(n), для которых p с ростом n возрастает (по крайней мере, не убывает, рис .13).

Патология (убывание p с ростом n) неустойчива. Действительно, представим себе сосуд, в котором заключено вещество при таких температуре T и концентрации n, что увеличение n при данной T приводит к падению давления. Выделим в этом сосуде какую-нибудь часть и слегка расширим ее (рис. 14). Тогда внутри этой части концентрация упадет, давление поднимется, а снаружи — наоборот: увеличение давления внутри и уменьшение его снаружи вызовет дальнейшее расширение выделенной части. Вещество перестанет быть однородным.

Поскольку какие-то колебания плотности будут всегда, «патологические» состояния не могут существовать в любом закрытом сосуде. При медленном изотермическом увеличении объема давление убывает (по крайней мере, не возрастает).

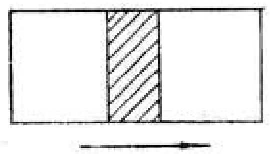

Рис. 14

Что значит «медленном»? Это предполагает, что в ходе расширения все возникающие состояния равновесны: если в произвольный момент вдруг остановить расширение и подождать сколь угодно долго, то состояние все время будет почти таким же, как и в момент остановки.

«Патологические» участки изотерм с «неправильной» зависимостью давления от объема (рост вместо убывания) не реализуются. Поэтому немонотонную изотерму газа Ван-дер-Ваальса естественно представить так. Состояния, лежащие на отрезке возрастания, названы **абсолютно неустойчивыми** (рис. 15,3), потому что если

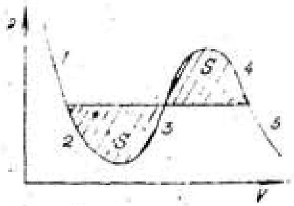

Рис. 15

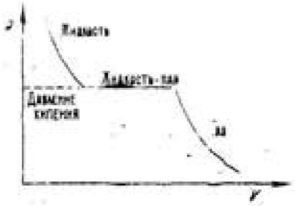

Рис. 16

представить их реализованными, то любое (сколь угодно малое) возмущение (сжатие или расширение какой-нибудь части вещества) приведет к их разрушению — распаду, потере однородности.

Но неустойчивыми могут быть не только состояния, лежащие на участке возрастания p(V). Пусть точка с координатами p_0, V_0 лежит на изотерме вблизи точки минимума, слева от нее (см. рис. 15,*2*). Если сосуд перегородить поршнем и изотермически сдвинуть поршень на некоторую величину, то в одной части сосуда вещество окажется в состоянии, соответствующем возрастанию давления с объемом, и начнется расслоение. При отпускании поршня он может не вернуться в исходное положение. Величина необходимого смещения уже не сколь угодно мала и зависит от расстояния между точкой (p_0, V_0) и минимумом изотермы. Аналогично показывается неустойчивость и для точек, лежащих вблизи максимума на изотерме и справа от него.

Состояния, которые теряют устойчивость и необратимо переходят в другие после конечных (а не сколь угодно малых) возмущений, называют **метастабильными** (рис. 15, *2, 4*).

Достаточно далеко от участка возрастания p(V) находятся **устойчивые** (стабильные) состояния (рис. 15, *1, 5*). Если сосуд, в котором состояние вещества устойчиво, перегородить поршнем и изотермически двигать его, то после снятия усилий поршень будет возвращаться на прежнее место.

Местоположение метастабильных состояний на немонотонной изотерме дается **правилом Максвелла.** Требуется провести горизонтальный отрезок, спрямляющий волнообразный участок изотермы так, чтобы площади верхней и нижней полуволн (см. рис. 15) совпали. Слева и справа от этого отрезка на изотерме расположены устойчивые состояния. Волнообразный участок, стягиваемый отрезком, состоит из метастабильных состояний (точек волны, где p(V) убывает) и абсолютно неустойчивых (где p(V) возрастает). Абсолютно неустойчивые состояния нереализуемы вовсе. Метастабильные состояния возможны, однако если подождать достаточно долго, то случайная флуктуация, расширение или сжатие какой-нибудь части вещества приведет к расслоению.

Сами точки отрезка соответствуют равновесным, но неоднородным состояниям «жидкость+насыщенный пар». Равновесная изотерма показана на рис. 16.

Правило Максвелла доказывать не будем. Заметим только, что площади полуволн имеют смысл механической работы.

Диффузия в приближении «абсолютно пьяного человека»

Серьезным аргументом против существования молекул на заре молекулярной физики считалась огромная величина тепловой скорости:

$$v_т = \sqrt{\frac{3kT}{m_{частицы}}}.$$

Действительно, при нормальных условиях, например для кислорода, молекулярный вес $\mu \cong 32 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $m_{частицы} = \mu/N_A \cong 32 \cdot 10^{-3}/(6 \cdot 10^{23}) \cong 5{,}3 \cdot 10^{-26}$ кг;

$$kT \cong 1{,}4 \cdot 10^{-23} \cdot 300 \cong 4{,}2 \cdot 10^{-21} \text{ Дж},$$

$$v_т \cong \sqrt{\frac{12{,}6 \cdot 10^{-21}}{5{,}3 \cdot 10^{-26}}} \approx 500 \text{ м/с}.$$

Однако известно, что при отсутствии ветра (сквозняка, какого-либо другого **течения** воздуха) запахи распространяются крайне медленно. Это совсем не согласуется со следующими оценками. Если масса ароматического вещества в 100 раз больше массы молекулы кислорода, то тепловая скорость всего в $\sqrt{100}=10$ раз меньше — 50 м/с. Даже если масса молекулы ароматического вещества составит 10000 масс молекулы кислорода (что совершенно невероятно), то и тогда тепловая скорость гигантской молекулы будет всего в $\sqrt{10000}=100$ раз меньше, т. е. 5 м/с.

Разгадка этого парадокса состоит в том, что неограниченно долго по прямой молекулы газа двигаться не могут. Пролетев некоторое расстояние, они сталкиваются с другой молекулой и меняют направление движения. Среднее значение этого расстояния называется средней длиной свободного пробега. Далее будем обозначать ее буквой l.

Пусть заданы средняя длина свободного пробега l и тепловая скорость $v_т$. Найдем, на какое расстояние удалится в среднем частица от своего начального положения за время t (предполагаем, что t много больше времени свободного пробега $\tau = l/v_т$). Строго говоря, данных пока недостаточно: мы не знаем, как будет двигаться частица после соударения, как вектор скорости после удара зависит (в среднем) от вектора скорости до удара. Простейшее предположение состоит в том, что не зависит никак. Его можно назвать приближением «абсолютно пьяного человека».

«Абсолютно пьяный человек» после каждого шага забывает, куда он шел, и совершенно случайно выбирает новое направление. То же предположим и для частицы: пусть после каждого соударения ее скорость имеет совершенно случайное направление и не зависит от предыдущего движения. Длину свободного пробега и скорость заменим средними величинами l и $v_т$.

Пусть в момент времени t_0 частица сразу после соударения находилась в точке $R=R(t_0)$. Найдем величину R через время свободного пробега $\tau=l/v_т$. Поскольку направление скорости совершенно случайно, не имеет смысла искать среднее значение вектора $\vec{R}$ в момент $t_0+\tau$. Оно будет равно $\vec{R}(t_0)$ (а почему?).

Отыщем среднее значение R^2 по теореме косинусов:

$$R^2(t_0+\tau)=R^2(t_0)+2R(t_0)l\cos\alpha+l^2.$$

Первые два слагаемых от случая не зависят (мы уже заменили длину свободного пробега ее средним значением l). Вопрос: чему равно среднее значение $R(t_0)l\cos\alpha$? $R(t_0)$ и l не являются случайными, вопрос сводится к такому: чему равно среднее значение $\cos\alpha$? Предполагается, что все направления равноправны, поэтому угол $\pi-\alpha$ (рис. 17, штриховое направление)

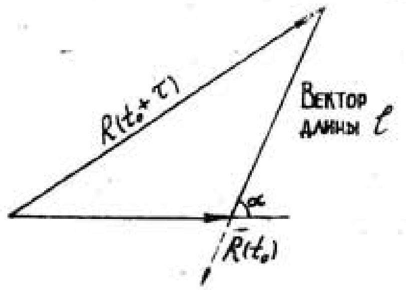

Рис. 17

встречается так же часто, как и α, а $\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$. Следовательно, среднее значение $\cos\alpha$ равно нулю.

Заметим, что выражение «углы встречаются одинаково часто» не вполне точно. Углов бесконечно много,

а каждый отдельный из них выпадает бесконечно редко. Надо было взять два одинаковых по величине малых интервала углов вблизи α ($[\alpha, \alpha+\Delta\alpha]$) и $\pi-\alpha$ ($[\pi-\alpha-\Delta\alpha, \pi-\alpha]$) и сказать, что угол между $R(t_0)$ и направлением движения попадает в эти интервалы одинаково часто.

Мы нашли, что в среднем

$$R^2(t_0+\tau)=R^2(t_0)+l^2.$$

Средний квадрат расстояния частицы в момент t до точки, от которой она начала движение при $t=0$, равен

$$r^2(t)=\frac{t}{\tau}l^2=t\,l v_т,$$

$$\left(v_т=\sqrt{\frac{3kT}{m_{частицы}}}\right),$$

где $\frac{t}{\tau}=\frac{t}{l}v_т$ характеризует среднее число соударений, испытываемых одной частицей за время t.

Итак, за время t частица в среднем сместится от начального положения на расстояние $\sqrt{lv_т}\sqrt{t}$. Самое примечательное в этой формуле то, что в нее входит не t, а $\sqrt{t}$ — смещение растет как корень из времени движения. Это основная формула приближения «абсолютно пьяного человека».

Длина свободного пробега

На каком расстоянии из-за деревьев не видно леса? Пусть деревья в лесу распределяются хаотически со средней плотностью n деревьев/м² (в реальном лесу n обычно меньше 1), это расстояние можно оценить как 1/(среднее расстояние между деревьями)². Для соснового бора без учета подлеска $n\approx0{,}05\div0{,}005$ (кроны предполагаем высокими). Видимость будет перекрываться стволами. Пусть d — средний диаметр ствола.

Ясно, что расстояние h, на котором в лесу имеется видимость, уменьшается как с ростом n, так и с ростом

d. Из соображений размерности легко подобрать простейший ответ:

$$h \sim \frac{1}{nd} \text{ (м) (h пропорционально } 1/nd). \qquad (1)$$

Хотя мы и писали для размерности n деревьев/м², число деревьев не дает новой единицы размерности, оно безразмерно (измеряется в безразмерных «штуках»).

Однако из n и d можно составить безразмерную комбинацию nd^2, поэтому $1/nd$ — не единственная комбинация из n и d размерности длины. Общий вид такой комбинации: $n^{\alpha}d^{1+2\alpha}$ (в формуле (1) $\alpha=-1$). Поэтому ответ придется искать другими способами. Кроме того, даже если с помощью соображений размерности удалось бы определить вид зависимости (это иногда удается), все равно остался бы неизвестным численный коэффициент перед формулой.

Чтобы оценить глубину видимости в лесу, представим, что мы перемещаемся вдоль опушки и смотрим в глубь леса. Как далеко в среднем уходит в глубь отрезок прямой до первого соприкосновения со стволом дерева? Ответ (очень простой) можно найти разными способами. Заметим, что прямая натыкается на дерево тогда, когда расстояние от нее до оси дерева (центра кружочка) меньше его диаметра. Поэтому рассмотрим вместо пря-

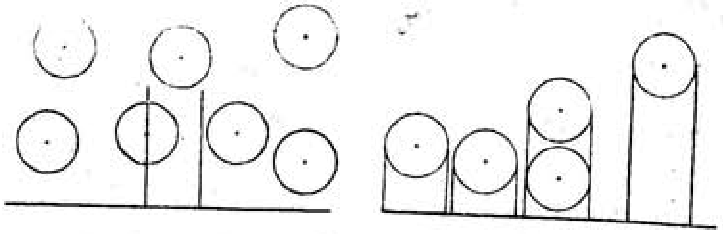

Рис. 18

мой полосу шириной d. Попадание в эту полосу центра одного из деревьев означает, что середина полосы — прямая — уперлась в ствол дерева (рис. 18).

Какой длины h должна быть в среднем полоса шириной d, чтобы на ней оказался центр одного дерева? Для этого площадь полосы hd должна совпадать со

средней площадью, приходящейся на 1 дерево, которая равна $1/n$ (м²/дерево). Итак,

$$hd = \frac{1}{n}, \quad h = \frac{1}{nd}. \qquad (2)$$

Снова получим ответ (1). Из-за деревьев не видно леса на расстоянии $1/nd$, где n — плотность числа деревьев (концентрация); d — средний диаметр ствола. При $n=0{,}01$ и $d=0{,}4$ получаем $h=250$ м (для очень просторного соснового бора без подлеска). Если деревья стоят чаще, например, через 5 м, то $h \approx 60$ м, если через 2,5 м, то $h \approx 15$ м.

Сумма диаметров деревьев, которые стоят от опушки леса не далее h(2), достаточна, чтобы полностью перекрыть видимость, однако этого не происходит, так как деревья частично перекрывают друг друга. Спроектируем все деревья (кружочки), лежащие вдоль опушки в полосе глубиной x, на опушку (прямую). Проекции покроют некоторую часть длины опушки, а часть останется открытой. Обозначим долю длины, оставшуюся свободной от точек проекции, α. Если к полосе глубиной x добавить еще такую же, чтобы в сумме глубина составила $2x$, то проекции деревьев второй полосы покроют некую часть длины, остававшейся свободной, а доля непокрытой части составит α^2 и т. д. Доля свободной от проекций длины опушки с увеличением глубины полосы уменьшается в геометрической прогрессии. Эта доля характеризует видимость для заданной глубины.

Зададимся вопросами: какое в среднем расстояние пролетает частица в газе от столкновения к столкновению, сколько времени проходит между столкновениями? В простейшем приближении можно предположить, что все молекулы стоят на месте, кроме одной, столкновения которой с неподвижными молекулами мы изучаем. Еще одно упрощающее предположение — пусть молекулы ведут себя как твердые шарики.

Итак, стоят шарики диаметром d_1, концентрацией n_1 (шариков/м³), летит один шарик диаметром d_2 со скоростью v. Сколько он в среднем пролетит? Шарики сталкиваются, когда расстояние между их центрами становится равным $(d_1+d_2)/2$. Поэтому ответ останется тот же, если неподвижные шарики считать точечными, а летящий — диаметром d_1+d_2. За время t летящий шарик «заметает» объем цилиндра с основанием площади

4*

$\pi\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2$ и высотой vt (рис. 19). Этот объем равен

$$vt\pi\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2.$$

Столкновение происходит, когда в этот объем попадает центр одной из неподвижных частиц. Каким должен быть в среднем объем цилиндра, чтобы в нем содержался центр одной неподвижной частицы? В среднем он равен $1/n_1$ — объему, приходящемуся на 1 частицу. Получаем

$$vt\pi\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2=\frac{1}{n_1},$$

$$t=\frac{1}{vn_1\pi\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2}. \qquad (3)$$

$$l=vt=\frac{1}{n_1\pi\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2}. \qquad (4)$$

Площадь основания цилиндра $\pi\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2$ обозначим σ. Если шарики имеют одинаковый диаметр d, то $\sigma=\pi d^2$. Итак, для средних времени и длины свободного пробега τ и l

$$\tau\approx\frac{1}{vn_1\sigma},\quad l\approx\frac{1}{n_1\sigma}. \qquad (5)$$

При изучении какого-то одного газа в формулах (5) принимают: n_1 — концентрация (частиц/м³), $\sigma=\pi d^2$, d — диаметр молекулы, v — тепловая скорость. Но фор-

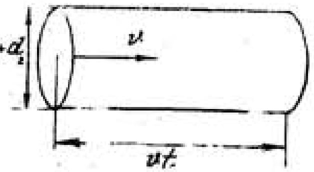

Рис. 19

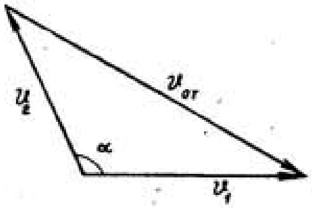

Рис. 20

мулы типа (3)—(5) можно, в принципе, использовать для изучения столкновений между частицами разных типов. Если, например, изучается движение примеси в газе, и концентрация этой примеси очень мала по сравнению с концентрацией основного газа, то время свободного пробега молекул примеси можно, казалось бы, вычислить по формулам (3)—(5). Однако возникает вопрос: какую скорость надо подставлять в эти формулы?

Рассмотрим первоначальную модель: частица, соударения которой изучают, движется со скоростью v относительно неподвижных частиц, с которыми она сталкивается. Возникает идея — взять в качестве v скорость **относительного** движения частиц. Этим мы попытаемся компенсировать ошибку, внесенную предположением о неподвижности частиц-мишеней. Вычислим средний квадрат относительной скорости (рис. 20):

$$v_{от}=v_1-v_2,$$

$$v^2_{от}=v_1^2-2|v_1||v_2|\cos\alpha+v_2^2.$$

Считая все направления равноправными, получаем, что среднее значение $\cos\alpha$ равно нулю, отсюда для среднего квадрата относительной тепловой скорости находим

$$v_{от}^2=v_1^2+v_2^2=3kT\left(\frac{1}{m_{1частиц}}+\frac{1}{m_{2частиц}}\right). \qquad (6)$$

Здесь в качестве $v_{1,2}$ взяли тепловые скорости частиц.

Итак, для молекулы газа 2, сталкивающейся с молекулами газа 1, получаем

$$\tau_2\approx\frac{1}{\sqrt{3kT\left(\frac{1}{m_{1частиц}}+\frac{1}{m_{2частиц}}\right)}}\cdot\frac{1}{n_1\cdot\sigma}; \qquad (7)$$

$$l\approx v_2\tau=\sqrt{\frac{m_{1частиц}+m_{2частиц}}{m_{1частиц}}}\cdot\frac{1}{n_1\cdot\sigma}.$$

Большую точность этих формул подтверждают и строгая теория, и эксперимент. Для одного газа тоже получаем некое уточнение:

$$\tau\approx\frac{1}{\sqrt{2}\,v_т\,n_{частиц}\sigma}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{m_{частиц}}{\sqrt{3kT}\,n_{частиц}\sigma}. \qquad (8)$$

Развиваемая на основе этих формул теория переноса не является точной, поэтому уточнение, вносимое в (8) множителем $1/\sqrt{2}$, не особенно значимо, но вот зависимость от масс в (6), (7) значительно важнее.

Будем рассматривать один газ с помощью формулы (8). В ней можно выразить концентрации $n_{\text{частиц}}$ через непосредственно измеряемые величины (температуру T и давление p), воспользовавшись уравнением состояния идеального газа в такой форме:

$p = kT\, n_{\text{част.}}$; $n_{\text{част.}} = \dfrac{p}{kT}$. Тогда

$$\tau \approx \frac{1}{\sqrt{6}} \frac{\sqrt{m_{\text{част.}}\, kT}}{p\sigma}, \quad l = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{kT}{p\sigma}. \qquad (9)$$

Формулы (8) и (9) будем использовать на равных правах.

Элементарная теория вязкости

Явление вязкости состоит в выравнивании неоднородности скорости течения. Определение вязкости можно дать, рассмотрев простейшее течение между двумя пластинами (рис. 21). Пусть одна пластина движется горизонтально с постоянной скоростью v, другая покоится, расстояние между ними x не меняется и ско-

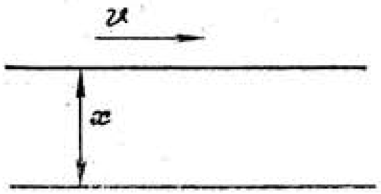

Рис. 21

рость газа между пластинами возрастает пропорционально расстоянию от точки до покоящейся пластины. Найдем внешнюю силу, которая должна быть приложена к движущейся пластине в направлении движения, чтобы его поддерживать (такая же по величине сила должна быть приложена к неподвижной пластине в противоположном направлении, чтобы ее не увлекало потоком).

Вязкие силы в этом течении возникают за счет того, что молекулы из областей с большей скоростью течения

переходят в области с меньшей скоростью, и их надо в среднем тормозить (чтобы скорость течения оставалась всюду постоянной), а молекулы из областей с меньшей скоростью течения переходят в области, где скорость больше, и их приходится в среднем ускорять.

Воспользуемся приближением «абсолютно пьяного человека», предполагая, что откуда бы частица ни прилетела в данную точку, она, испытав соударение, приобретает в среднем те характеристики (среднее значение вектора скорости, которое характеризует движение газа как целое, среднее значение энергии, связанное с температурой и др.), которые характеризуют газ вблизи точки соударения. Это можно выразить так: после каждого соударения частица полностью забывает свою предысторию.

Можно построить такую модель вязкости. Газ между пластинами представим состоящим из слоев толщины l (l — длина свободного пробега). Скорость течения в каждом слое будем считать постоянной и равной скорости течения в его середине. Скорости, приписываемые соседним слоям, отличаются на $\Delta v = v$ (число слоев); $\Delta v = \dfrac{vl}{h} = l\dfrac{v}{h}$. Молекулы переходят из слоя в слой, испытывают в новом слое соударение и меняют средний вектор скорости.

Величина соответствующего приращения импульса на одну перешедшую частицу равна $m_{\text{частиц}}\Delta v$. Чтобы найти силу вязкого трения между двумя слоями, надо отыскать число частиц, перешедших из одного слоя в другой за некое время Δt, умножить его на $m_{\text{частиц}}\Delta v$ (это будет импульс силы) и разделить на Δt. Сделаем это.

Важная деталь: столкновениями частиц, переходящих из слоя в слой, внутри их исходных слоев пренебрегаем; считаем, что малое время Δt они до перехода в соседний слой двигались свободно, так как толщина слоя — средняя длина свободного пробега.

Половина частиц каждого слоя имеет вертикальную составляющую скорости вверх, половина — вниз. Для описания перехода, например, из нижнего слоя в верхний нужно рассмотреть ту половину частиц нижнего слоя, которая движется вверх. Среднюю скорость этого движения можно оценить как $\sqrt{\dfrac{kT}{m_{частиц}}}$ — тепловую скорость на одну степень свободы (вверх—вниз). За время Δt (много меньше τ) из нижнего слоя в верхний перейдет столько частиц, сколько успеет долететь из объема нижнего слоя до границы раздела слоев. Чтобы найти это число, надо среднее вертикальное перемещение частиц, движущихся вверх (у нас оно оценивается как $\Delta t\sqrt{\dfrac{kT}{m}}$), умножить на площадь пластин S (это будет объем), на концентрацию частиц $n_{частиц}$ и на 1/2 (долю частиц, движущихся вверх). Таким образом, для числа частиц, перешедших из слоя в слой за время Δt, получаем выражение

$$\Delta t\sqrt{\frac{kT}{m_{частиц}}}\cdot S\, n_{частиц}\frac{1}{2}.$$

Они переносят импульс

$$m_{частиц}\,\Delta v\,\Delta t\sqrt{\frac{kT}{m_{частиц}}}\,S\,n_{частиц}\frac{1}{2}=$$

$$=m_{частиц}\,l\,n_{частиц}\sqrt{\frac{kT}{m_{частиц}}}\,S\,\frac{\bar{v}}{2h}\,\Delta t.$$

Сила вязкого трения равна отношению перенесенного импульса к Δt. Получаем

$$F=\frac{1}{2}\sqrt{kT\,m_{частиц}}\,l\,n_{частиц}\,S\,\frac{\bar{v}}{h}. \qquad (1)$$

Эта сила пропорциональна площади поверхности S (что было очевидно) и падению скорости на единице длины v/h (что также можно было ожидать). Коэффициент пропорциональности называется коэффициентом вязкости и обозначается η,

$$\eta=\sqrt{kTm_{частиц}}\,l\,n_{частиц}. \qquad (2)$$

Коэффициент η является характеристикой состояния газа, находящегося между пластинками. Он не зависит ни от площади пластин, ни от скорости течения.

Наиболее удивительный факт состоит в том, что η зависит не от концентрации $n_{частиц}$, а только от T и от характеристик молекул: вследствие (8)

$$l=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{n_{частиц}\sigma},$$

$$\eta=\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{kT\,m_{частиц}}\,\frac{1}{\sigma}. \qquad (3)$$

Это обстоятельство поразило Дж. К. Максвелла, который впервые его обнаружил, и подверглось тщательной экспериментальной проверке. При увеличении плотности уменьшается длина свободного пробега, что ухудшает перенос и снижает вязкость, но в то же время увеличивается число частиц, переносящих импульс, что улучшает перенос. Эти два эффекта компенсируют друг друга.

А. Б. Мордвинов

ДЕШИФРОВКА ПОЭТИЧЕСКОГО ТЕКСТА

(Цикл А. Блока
«На поле Куликовом»)

1.1. Подход

Привычка — замена не только счастию, как это известно нам из Пушкина (Евгений Онегин, 2, XXXI), но и многому другому, во всяком случае — пониманию. Пять стихотворений Блока, объединенных им в 1908 г. в цикл «На поле Куликовом» (Ц), всем знакомы, их тексты — привычны. Многие скажут, что понимают их. Часть думающих так будут иметь в виду лишь факт привычности этих текстов, а главное — условностей поэтической речи вообще. Условности же эти предполагают для многих резкое занижение требований к осмысленности речи.

Некоторые отстаивают такое отношение к поэтическому тексту принципиально: поэзию надо понимать не умом, а сердцем. Не будем спорить. Попробуем лучше убедиться, что иногда мы не можем назвать поэтический текст понятным в том смысле, в каком мы можем назвать понятной обычную речь.

Пусть перед нами следующее высказывание: «Мы вышли в поле. Нам не уйти, нам не оглянуться. За рекой кричали птицы. Они кричат снова. На пути лежит камень».

Будет ли утверждать кто-нибудь, что этот текст понятен? Вряд ли. В нем не просматривается то, что является основой понимания — целевая структура речи: по какому поводу, кому и зачем говорится то, что сказано. Отсюда эффект бессвязности: соседние предложения не удалось бы связать вопросами, показывающими, как следует учитывать одно предложение при понимании другого. Сравните такой нормально построенный текст:

Мы вышли в поле. Кругом была тишина. Только за рекой кричали птицы=

Мы вышли в поле (+Что было там видно или слышно?) — Кругом была тишина (+Какие детали выделялись на этом фоне?) — За рекой кричали птицы.

Если верно, что первый текст, в отличие от второго, непонятен, придется согласиться, что в этом же смысле непонятно начало Ц2: первый текст повторяет его структуру, не содержа, однако, примет поэтического, которые подталкивали бы занизить требования к его осмысленности (что мы и делали бы, с ходу объявляя Ц понятным). Следовательно, если мы хотим понять, например, Ц2 не только «сердцем», но и обычным способом, нам следует специально заняться его коммуникативной дешифровкой. Ее содержание должно свестись к установлению целевой структуры речи — если мы вообще готовы верить, что она здесь имеется.

Дальнейшее изложение адресовано тому, кто готов в это верить и кому эксперимент с началом Ц2 показал, что хотя бы часть того, в чем мерещилось нам понимание, оказалось лишь привычкой. Разумеется, необходимо и третье условие — желание заменить привычку чем-то более близким к нормальному пониманию (это требует и некоторой решительности, ибо предстоит серьезно рискнуть тем, что было «заменой счастию»).

1.2. Перспектива

Доверившемуся следует ознакомиться с условиями предстоящего маршрута.

Жанр излагаемого здесь по поводу текстов Ц можно определить как коммуникативный комментарий. Разумеется, без элементов комментария историко-литературного, словарного и так называемого реального (объяснения предметных «реалий») обойтись не удастся. Однако заинтересованный этою стороною дела должен обращаться за более полной информацией к работам литературоведческого характера о творчестве Блока. Среди них есть специально посвященные Ц [1]. Данные этих исследований использованы и в предлагаемом комментарии, но лишь в той степени, в какой они необходимы для коммуникативно-целевого анализа поэтической речи Ц.

Сам коммуникативно-целевой анализ текста — методика лингвистическая. Заинтересованный методикой должен обращаться к специальным лингвистическим публикациям [2].

Предполагается достижение двух целей. Первая—построение по возможности исчерпывающей модели буквального понимания блоковского текста: в отличие от безграничных возможностей символического, ассоциативного и эмоционального понимания, обслуживаемого в основном литературоведческим комментарием, понимание на уровне буквального смысла сказанного представляется осуществимым исчерпывающе и однозначно (одно из двух несовпадающих пониманий буквального смысла должно обнаружить свою ошибочность). Вторая цель — отработка нескольких стандартизованных (а значит, поддающихся усвоению и дальнейшему применению) приемов коммуникативной дешифровки текста.

Таким образом, хотя лингвистическая фразеология сведена в комментарии к минимуму, по объекту и способам работы с ним предпринимаемый разбор художественного текста — разбор лингвистический.

Достоверность результатов (т. е. получаемых толкований) обеспечивается проверяемостью методики. Более того, понимание методов построения толкований входит в понимание самих толкований. Этим обусловлена композиция комментария: от поиска смысла к его фиксации, а не от предлагаемого толкования к аргументам в его пользу.

Стандартные приемы комментирования отмечаются в тексте символами вида ТО-1, ТО-2... (=толковательная операция; номера ТО условны, они отражают лишь порядок изложения).

Стремление изменить привычное соотношение между индивидуальным читательским или комментаторским «проникновением» в текст и общедоступной формальной технологией толкования в пользу второй не отменяет важнейшей из всех герменевтических[3] истин: «Комментарий, как и всякий научный текст, помогает размышлениям читателя, но не может заменить их. Без читательского интереса к произведению, любви к поэзии и культуры восприятия поэтического текста, без определенного уровня знаний и эстетической интуиции, без культуры мысли и эмоций читателя комментарий мертв»[4].

Практически это означает, что ознакомление с комментарием бессмысленно без как минимум троекратного обращения к комментируемому тексту: предварительного чтения, чтения «вразбивку» (в порядке отсылок комментария), итогового чтения текста. Комментарий достиг цели, если при итоговом чтении смысловое видение

текста отличается от предварительного. Полезно заметить, что смысловое видение текста отчасти воплощается в его «слышании» (например, в степени уверенности при расстановке логических ударений).

Комментарий для удобства разделен на основной и вспомогательный. Отсылки к вспомогательному комментарию в составе основного даны символами вида B1, B2...

ОСНОВНОЙ КОММЕНТАРИЙ

Ц2

1.1 Мы, сам-друг, над степью в полночь стали:
1.2 Не вернуться, не взглянуть назад.
1.3 За Непрядвой лебеди кричали,
1.4 И опять, опять они кричат...
2.1 На пути — горючий белый камень.
2.2 За рекой — поганая орда.
2.3 Светлый стяг над нашими полками
2.4 Не взыграет больше никогда.
3.1 И, к земле склонившись головою,
3.2 Говорит мне друг: «Остри свой меч,
3.3 Чтоб недаром биться с татарвою,
3.4 За святое дело мертвым лечь!»
4.1 Я — не первый воин, не последний,
4.2 Долго будет родина больна.
4.3 Помяни ж за раннею обедней
4.4 Мила друга, светлая жена!

8 июня 1908

2.1. Действующие лица, ситуация

Ключевые вопросы для выяснения целевой структуры текста — кто, где и когда говорит. Не всегда можно установить это сразу, но Ц2 — единственный в цикле дает такую возможность.

Что известно из Ц2 о его речевом герое (том, от чьего лица подается текст)? Для ответа требуется ТО-1 — сбор показаний текста, которые могли бы служить недвусмысленными свидетельствами по этому вопросу.

2.1.1. Реализуем ТО-1. Герой — один из будущих участников битвы с татарами: 3.2—4*. Он — рядом с неким «другом»: 3.2. Он с другом вдвоем — рядом с ними никого нет: 1.1 (такое утверждение требует пони-

* Отсылка вида 3.2—4 означает: 3-я строфа стихотворения, открывающего данный раздел, строки 2—4 (нумерация строф и строк дана при тексте). Отсылка вида 2.3.2—4 означает: Ц2, 3-я строфа, строки 2—4. Отсылка вида п. 2.1.1 означает: раздел статьи (пункт) под номером 2.1.2.

мания, что 1.1.=Мы, один и другой, стали над степью: В1).

Время действия — полночь перед недалекой битвой: 1.1 и 3.2—3. Место действия — степь где-то вблизи Непрядвы (В2): 1.1.3—4, т. е. в географически точно указанном районе Куликовского сражения. Следовательно, двоим, вышедшим в степь, неоткуда сюда прийти, кроме как из стана русского войска.

Главный итог сбора свидетельств — уверенность, что за текстом должна стоять ситуация—прототип. Должно предполагаться заранее известным, что означает странные обстоятельства, обозначенные в Ц2: двое, ушедшие из воинского лагеря, готовящегося к бою, слушать крики лебедей и думать о каком-то возвращении или обращении взора куда-то назад.

Отметим это как полезное правило дешифровки: если текст указывает точные детали ситуации, не проясняя самой ситуации, он почти наверняка отсылает нас к другому тексту (текстам), где эта ситуация описана. За текстом стоит прототипический сюжет, который должен быть восстановлен.

2.1.2. В Ц2 обнаружена скрытая отсылка. Ее расшифровка требует ТО-2 — поиска прототипических параллелей.

Иногда заранее не известно, к какому тексту адресует нас отсылка. Но с Ц2 особых сложностей здесь не возникает. Существует по меньшей мере два блоковских произведения, содержащих косвенный автокомментарий к Ц: статья (С) «Народ и интеллигенция» и драма «Песнь судьбы» (Д). Обе созданы в том же, что и Ц, 1908 году. В обеих упоминается Куликовская битва и есть прямые словесные совпадения с текстами Ц [5].

Д (с. 148—149 — монолог центрального героя, Германа): «Все, что было, все, что будет, — обступило меня... Помню страшный день Куликовской битвы. — Князь встал с дружиной на холме, земля дрожала от скрипа татарских телег, орлиный клекот грозил невзгодой...».

С(с. 86): «Над городами стоит гул... такой гул, какой стоял над татарским станом в ночь перед Куликовской битвой, как говорит сказание. Скрипят бесчисленные телеги за Непрядвой, стоит людской вопль, а на туманной реке тревожно плещутся и кричат гуси и лебеди».

Текст-источник указан самим Блоком. Сказания («Сказание о Мамаевом побоище» и «Задонщина») и летописные известия о Куликовском сражении, относимые к концу XIV — началу XVI в., — цикл источников, по которым как раз и известны детали события [6]. Степень опоры Блока на эти источники явствует из того, что они использованы в С, Д и Ц на уровне почти прямого цитирования. Сравним с приведенными фрагментами С и Д, а также с Ц (2.1.3—4; 3.5.1—2; 5.3.3—4) слова древнерусских книжников.

«Задонщина»: «Уже бо въскрипели телегы межу Доном и Непром, идут хинове на Русскую землю!.. Тогда гуси возгоготаша и лебеди крилы въсплескаша. То ти не гуси возгоготаша, ни лебеди крилы въсплескаша, но поганый Момай пришел на Русскую землю и вои своя привел» (ЛП, с. 9).

«Сказание о Мамаевом побоище»: «И обратившася на полк татарский и слышавше кличь и стук велий, аки торжища снимаются... по десней же стране бысть во птицах трепет велий, кричаще и крылами биюще, и враны грающе, и орлы клегчуще по реце Непрядве» (ЛП, с. 61): В3.

Именно «Сказание о Мамаевом побоище» и содержит подробное описание ситуации, прототипической для Ц2. Накануне боя воевода Дмитрий Боброк Волынский — тот самый, кто на критической стадии сражения определит момент скомандовать атаку знаменитому засадному полку, — «рече... великому князю: «Хощу, государь, в нощь сию примету свою испытати». И уже заря померкла, нощи глубоце сущи, Дмитрей же Волынецъ, поимъ с собою великого князя единаго, и выехавъ на поле Куликово и, ставъ посреди обоихъ плъковъ», сначала сравнивал слышимое и видимое на той и на другой сторонах, а потом «сниде с коня и приныче к земли десным ухом на долгъ час» (ЛП, с. 40).

Голос услышанной земли звучит в передаче воеводы несколько загадочно: «Слышах землю плачущуся надвое: едина бо сь страна, аки некаа жена, напрасно плачущися о чадех своихь еллиньскым гласом, другаа же страна, аки некаа девица, единою възопи велми плачевным гласом, аки в свирель некую, жалостно слышати велми». Прогноз испытателя примет тем не менее вполне однозначен: «А твоего христолюбиваго въиньства много падеть, нъ обаче твой врьхъ, твоа слава будеть». Слышавъ же то, князь великий прослезися и рече: «Господу богу вся възможна: всех нас дыхание в руце его!» (ЛП, с. 40).

2.1.3. Прототипический сюжет Ц2 установлен. Разумеется, к собственно сюжету Ц2 его приравнять нельзя. Обращает на себя внимание, например, поразительная неопределенность — вопреки протосюжету — предсказания испытателя примет: 3.2—4. Другое очевидное расхождение с протосюжетом — местоположение героев. Из 2.2 явствует, что испытание примет происходит не на Куликовом поле, а на левом берегу Дона (В4).

В толкование можно включить на основании ТО-2 лишь общее определение сюжетной ситуации (испытание примет) и ролей ее участников. Действующие лица Ц2 — это, конечно, не Дмитрий Донской и Дмитрий Боброк. В системе обозначений Ц первый из них (речевой герой Ц2) — Князь (он дважды назван так в Ц3: 3.3.2 и 3.4.4). Второй индивидуализирован своим особым даром — способностью ясновидения. Это вещий воин, который, очевидно, оказывается рядом с Князем лишь потому, что ему открыты тайны, скрытые для Князя. Будем именовать этого героя Тайновидцем (специального обозначения в самом Ц нет; излюбленное блоковское слово того же смыслового ряда — маг, но к ситуации Ц2 оно вряд ли подходит).

Итак, на вопросы, кто, где и когда ведет речь в Ц2, получены ответы: Князь и Тайновидец заняты испытанием примет в поле между враждебными воинскими лагерями в ночь перед битвой. Базовый компонент комментария — сюжетный — получен.

2.2. Коммуникативный сюжет

Событийный сюжет Ц2, приемы восстановления которого прослежены в п. 2.1 (а мы пока лишь прослеживали уже проделанный другими путь: сюжетная основа Ц2 давно известна литературоведам), — исходный пункт для развертывания сюжета коммуникативного: для монолога Князя он составляет только фон. Коммуникативный жанр этого монолога можно определить как слово внутреннего самоотчета: речь обращена к себе и обнажает перед внутренним взором говорящего существо видимого, слышимого, переживаемого им самим.

Если речь в 3.2—4 передает слышимое героем предсказание, то в предшествующей речи должны выразить себя владеющие Князем ожидания, а в финале было бы естественно обнаружить реакцию Князя на услышанное. Текст должен строиться по модели вида «вопрос—ответ—реакция» (Что видно? — Огни. — Идем же туда!).

Применена ТО-3: моделирование гипотетической целевой структуры речи. Гипотеза опирается здесь только на представления о том, каково обычное содержание речи, рождающейся в данных или сходных событийно-сюжетных обстоятельствах. ТО-3 может опираться и на формальные (прежде всего — синтаксические) показания текста, как она большей частью и осуществляется в дальнейшем.

В чем состоят ожидания героя и его реакция, должно было бы явствовать из содержания самого предсказания. Но как раз последнее остается в Ц2 загадкой. Что это за предсказание (и надо ли быть для такого предсказания Тайновидцем), если сказанное сводится к напоминанию Князю перед боем, что следует готовиться к бою, чтобы биться недаром? Видимо, смысл предсказания состоит в чем-то другом, а значит, и ожидания Князя не те, что в протосюжете — они не в том, чтобы узнать заранее исход боя.

Займемся их дешифровкой отдельно.

2.2.1. Прибегнем к помощи очередного полезного правила дешифровки — начинать с выделения в тексте узлов, поддающихся однозначному толкованию. Неоднозначность других компонентов текста должна сниматься требованием смыслового согласования с однозначно толкуемыми деталями.

Для Ц2 такой ключевой узел — 2.3—4. Вообще предложения подобного типа допускают теоретически два осмысления: они больше никогда не встретятся = 1) они когда-то встречались, но сейчас в разлуке, и встреча больше не повторится; 2) они сейчас рядом, но скоро окажутся в разлуке, и встреча больше не повторится.

Пущена в ход ТО-4: отбор смысловых альтернатив. Обращение не к предложению из текста, а к образцу, воспроизводящему его формальную структуру, необходимо именно для поиска максимума возможностей осмысления подобных структур вне конкретного контекста. Построенные схемы понимания прилагаются далее к исходному предложению, давая альтернативные его понимания. Из них и отбирается то, которое не противоречит контексту.

Применим две построенные схемы понимания к 2.3—4. Первая дает результат: больше нет над нами светлого стяга, какой был когда-то, и никогда его уже над нами не будет. Такое осмысление явно не вписывается в текст — ничего ведь еще не случилось.

Может ли найти обоснование осмысление по второй схеме?

Куликовская битва пришлась (или была приурочена) на день праздника Рождества Богородицы — субботу 8 сентября (1380 г.), что отмечено во всех летописных источниках, не забывающих также назвать этот праздник «светоносным» (ЛП, с. 40). Именно к Богородице, светоносной покровительнице православных, воззвал князь Дмитрий, двинувшись в бой (ЛП, с. 42). Стяг, о котором идет речь в Ц2, не имеет отношения к реальному княжескому стягу. По летописным источникам, княжеский флаг — черный (ЛП, с. 402). Но тогда светлый стяг Ц2 — стяг незримый: это осеняющее вышним светом благословение Богородицы, дарованное счастливым моментом (стяг «взыграл» — 2.4) и не обещающее возможностей повторного получения.

Таким образом, 2.3—4 толкуется однозначно — по второй из схем: Сейчас и никогда больше вышнее благословение с нами = Сейчас или никогда *.

Но это означает, что Князь, ожидая испытания примет, убеждает себя в неизбежности битвы. Следовательно, само испытание примет — средство укрепиться в таком убеждении. Князь вышел в поле с Тайновидцем не выяснять исход сражения, а решаться.

Могут ли быть согласованы с этим пониманием менее однозначные места текста? Начнем с 1.2 — едва ли не самого темного места Ц2: оно даже провоцирует заведомое непонимание «Ни вернуться нам не удастся, ни назад взглянуть» (в тексте нет «ни» — есть «не»).

* ТО-4 осуществлена. Прием этот играет решающую роль в дальнейших рассуждениях. Проверяемость толкований гарантируется в первую очередь им: любое толкование целого должно обеспечить один определенный выбор из суммы учтенных альтернатив понимания. При всей важности ТО-4 соответствующие выкладки, если они слишком объемны, вынесены в дальнейшем во вспомогательный комментарий.

Применим ТО-4: В5. Получаем толкование: 1.2 = Только бы не вернуться... = Только бы не позволить себе слабости вернуться, не дать себе даже взглянуть назад = Только бы не позволить себе отступить, пусть даже в мыслях.

Но как раз такое понимание соответствует толкованию 2.3—4 («Теперь или никогда»). Если та́к, то коммуникативный сюжет 1.1—2.4 таков: колеблющийся духом Князь убеждает себя, пытаясь одолеть сомнения. Заклиная себя «не взглянуть назад», он ищет опоры в каком-нибудь воодушевляющем знаке. Он не может отделаться от ощущения, что даже лебединый крик обращен к нему и что-то значит. Его самозаклинание прервано этим вновь прозвучавшим криком: 1.3—4. Но знак снова остается не понят, и Князь снова принимается убеждать себя: пришла такая судьба, когда на пути — горючий белый камень: 2.1 (В6).

Бел-горюч камень в русском фольклоре — препятствие на пути, обладающее волшебной роковой силой. Преодолевая это препятствие, герой решает свою судьбу (возможно, выносит себе приговор): В7. Князю открывается мысль, что именно такую судьбу означает достигнутый им рубеж: 2.2, и он твердит себе, что один только этот миг и дан ему высшей силой, чтобы роковой камень перешагнуть: 2.3—4.

2.2.2. Итак, коммуникативная мотивировка первой части текста ясна. Князю нужен знак, чтобы укрепиться духом. Он и сам слышит вещие голоса (лебединый крик), но не способен их понять. Решающее слово должен произнести Тайновидец. И он его произносит: 3.2—4.

Теперь смысл пророчества понятен. Оно казалось лишенным смысла только на фоне предположения, что битва предрешена. Теперь, на фоне колебаний и сомнений Князя, оно звучит вполне определенно: «Остри свой меч». Битва должна состояться, говорит устами Тайновидца земля.

Начало гипотетической схемы «вопрос (ожидания)—ответ—реакция» согласуется с возможностями построчного толкования. В финальной строфе есть только одно слово, указывающее на возможность понимания 4.1—4 как реакции — решения Князя. Это частица «ж» (4.3). Но это слово есть, и следовательно (ТО-3), текст построен по модели: Решено. Я сделаю это. В конце концов, нет ничего невозможного в таком поступке.

Речевой жанр такого построения можно было бы назвать жанром запаздывающего самоободрения (не ты первый, не ты последний): дело после слов Тайновидца все равно уже решено (4.1—2). Князю остается лишь резюмировать (ТО-3): итак, я решился. Помолитесь же обо мне: В8.

Пока не ясны смысловые контуры Ц в целом, мотив нерешительности Князя может вызвать недоумение. Ограничимся временно двумя косвенными мотивировками (ТО-2). Одна — историческая. Хотя в протосюжете мы находим Князя вполне решившимся на битву к моменту испытания примет, однако «Сказание о Мамаевом побоище» сообщает нам, что князь Дмитрий, «смирень человекъ и образъ нося смиреномудрия» (ЛП, с. 27), встретил начало агрессии Мамая попытками умиротворить его. Известно, что Сказание извращает факты, повествуя, как дважды обращался князь за советом к митрополиту Киприану и двинулся в поход лишь тогда, когда так решил духовный пастырь (ЛП, с. 28—29 и 339—340). Но именно это сообщение (а не его критика) было известно Блоку наверняка, как и не лишенная психологической достоверности деталь молитвы Дмитрия, получившего сведения о Мамаевом наступлении: «Вем бо, господи, яко мене ради, грешнаго, хощеши всю землю нашу погубити, аз бо съгрешихъ пред тобою паче всех человекъ» (ЛП, с. 28).

Уже почти на пороге битвы князю советуют скорее переправиться через Дон, «да не будеть ни единому же помышлениа въспять» (ЛП, с. 37—38). Летописная же повесть свидетельствует: «Придиоша к Дону и сташа ту, и много думавше, овии глаголааше: «Поиде, княже, за Донъ», а друзии реша: «Не ходи ти, бо понеже умножишася врази наши — не токмо тотарове, но и литва, и рязанци» (ЛП, с. 19).

Вторая мотивировка — блоковская. Одна из основных тем Д выражена центральным героем—Германом— в формуле: «Самое трудное—перейти черту» (Д, с. 114). Герман решительно покидает свой дом, но вдруг отменяет свое решение, идет назад и не доводит своего возвращения до конца лишь потому, что ему является некое вещее Видение в смутном женском облике, «чуть слышно» командующее: «За мной» (Д, с. 118) и заставляющее его вернуться на путь, ведущий за черту (ср. межевой камень перед Князем).

Речь у Блока идет не о слабости или малодушии героя. Устами Германа эта психологическая ситуация передана вполне отчетливо: «Вы думаете, что я — раб? Нет, я свободный! ...Вы ничего не понимаете! Путь свободен, ведь здесь только и начинается жизнь! Здесь только и начинается долг! Когда путь свободен — должно неминуемо идти. Может быть, все самое нежное, самое заветное — надо разрушить!» (Д, с. 147—148).

Добавим, что Герман уходит «за черту» из белого домика, где остается ангелоподобная, вся в белом, его жена Елена (само имя которой в переводе с греческого — Светлая), так что «светлая жена» Князя, как мы и увидим впоследствии, не может не иметь отношения к описанной духовной ситуации: В9. Она и вообще значима для лирического героя Блока этого периода: ср., например, стихотворение «Под шум и звон однообразный...» (1909), герой которого уходит «в метель, во мрак и пустоту», не покидаемый мучительным вопросом: «Что, если я, завороженный, Сознанья оборвавший нить, Вернусь домой, уничиженный, — Ты сможешь ли меня простить?»

Комментарий к Ц2 построен. Обратимся к следующему стихотворению цикла.

Ц3

1.1 В ночь, когда Мамай залег с ордою
1.2 Степи и мосты,
1.3 В темном поле были мы с Тобою,—
1.4 Разве знала Ты?
2.1 Перед Доном, темным и зловещим,
2.2 Средь ночных полей,
2.3 Слышал я Твой голос сердцем вещим
2.4 В криках лебедей.
3.1 С полуночи тучей возносилась
3.2 Княжеская рать,
3.3 А вдали, вдали о стремя билась,
3.4 Голосила мать.
4.1 И, чертя круги, ночные птицы
4.2 Реяли вдали.
4.3 А над Русью тихие зарницы
4.4 Князя стерегли.
5.1 Орлий клекот над татарским станом
5.2 Угрожал бедой,
5.3 А Непрядва убралась туманом,
5.4 Что княжна фатой.
6.1 И с туманом над Непрядвой спящей
6.2 Прямо на меня
6.3 Ты сошла, в одежде, свет струящей,
6.4 Не спугнув коня.
7.1 Серебром волны блеснула другу

7.2 На стальном мече,
7.3 Освежила пыльную кольчугу
7.4 На моем плече.
8.1 И когда, наутро, тучей черной
8.2 Двинулась орда,
8.3 Был в щите Твой лик нерукотворный
8.4 Светел навсегда.

24 июня 1908

3.1. Действующие лица, ситуация

Речевой герой Ц3 сообщает о себе (ТО-1), что в ночь, предшествовавшую битве (1.1—2 и 8.1—2), он, вооруженный (7.3—4), был в степи недалеко от татарского стана (1.3 и 5.1). Ему была видна Непрядва, и он слышал лебединые крики (5.3 и 2.3—4). Он думал о князе (4.3—4), а утром шел с ним в бой (8.1—3).

Можно, конечно, предположить, что речь ведется от лица какого-то нового героя, последовавшего независимо от Князя с Тайновидцем их примеру — вышедшего зачем-то в одиночку из воинского стана в степь в ночь перед битвой.

Из такого понимания будет следовать, что «мы с Тобою» (1.3) — это «я и Ты» (новая пара персонажей), а «другу» (7.1) = «мне, Твоему другу». Склонные к такому пониманию могут даже сослаться на Князя из Ц2, который видит в своем лице именно «милого друга» Светлой жены (1.4.4).

Сомнительно, однако, что Той в этом случае надо объяснять, где и с кем она была тогда-то и что она там делала (Ц3 при таком понимании неизбежно предстанет перед нами как такое объяснение).

Второе предположение (ТО-4): перед нами не новая ситуация, похожая до деталей на ситуацию Ц2 (вплоть до лебединых криков на реке), а та же самая (ТО-2). Но тогда это может быть лишь рассказ о ней же от лица второго участника испытания примет — Тайновидца. Проверим эту гипотезу.

Первым сильным, хотя и косвенным подтверждением является (ТО-1) тот факт, что оба случая перечисления героев в Ц3 — 1.3 и 7.1—4 — допускают понимание в том смысле, что действующих лиц «в темном поле» не два, а три (ТО-4).

Если «мы с Тобою» в 1.3 понимать «мы вдвоем и Ты», то загадочная бессодержательность 1.3 исчезает: в этом случае перед нами не сообщение в адрес Той, где

она с героем находилась, а заявка героя на раскрытие им истины: «нас», бывших в этом поле, было больше, чем кому-то могло казаться: не двое, а трое. ТО-4 показывает: 1.3 = Мне известно, что в поле мы со спутником были не вдвоем, а с Тобою = Я увидел больше, чем мой спутник, и, в отличие от него, знаю о Твоем присутствии (отметим, что такое понимание требует в 1.3 логического ударения на последнем слове — Тобою).

Тогда «другу» в 7.1 = не «Твоему другу — мне», а «моему другу — спутнику». Ты явилась незримо и нематериально (ТО-1) — оставшись незамеченной никем, даже «не спугнув коня» (6.4), но не оставила без знака Твоего внимания ни моего спутника, ни меня (ему подарила лунный зайчик — 7.1—2, мне — влагу росы на кольчуге — 7.3—4).

Если вспомнить, что Князь противопоставлен Тайновидцу в Ц2 как глухой к вещим голосам сведущему в них (п. 2.2.2), тождественность спутника героя Ц3 Князю, его самого — Тайновидцу становится еще более вероятной. Есть, однако, еще более ясные свидетельства.

Строки 3.3—4 сами по себе неоднозначны и нуждались бы в ТО-4, если бы не параллели в уже указанных (п. 2.1.2) местах Д и С (ТО-2). Вот непосредственные продолжения приведенных в п. 2.1.2 цитат.

Д (с. 149): «Потом поползла зловещая ночь, и Непрядва убралась туманом, как невеста фатой. Князь и воевода стали под холмом и слушали землю: лебеди и гуси мятежно плескались, рыдала вдовица, мать билась о стремя сына. Только над русским станом стояла тишина, и полыхала далекая зарница»;

С (с. 86): «Среди десятка миллионов царствуют как будто сон и тишина. Но и над станом Дмитрия Донского стояла тишина; однако заплакал воевода Боброк, припав ухом к земле: он услышал, как неутешно плачет вдовица, как мать бьется о стремя сына. Над русским станом полыхала далекая и зловещая зарница».

Кто слышал то, что слышит в 3.3—4 герой Ц3, в С назван прямо — воевода Боброк. В обоих фрагментах прозы этот эпизод заключен в контекст испытания примет, обрамлен при этом деталями, имеющими точные соответствия не в Ц2, а в Ц3 (5.3—4, 4.3, 2.1).

Можно считать установленным, что герой Ц3 — Тайновидец, выступавший уже в качестве «друга» Князя в Ц2, а теперь именующийся другом (7.1) самого Князя. Ситуация, описанная в 2.1—7.4, та же, что и в Ц2: испытание примет. В отличие от Ц2, где речь героя приурочена ко времени самого события, в Ц3 второй его участник о событии уже вспоминает — и речь его приходится на время после битвы (1.1—4 и 8.1—4).

3.2. Коммуникативный сюжет

Коммуникативный жанр строф 2—7 — самоотчет Тайновидца, как содержание Ц2 — самоотчет Князя. Он видит перед собой ту же картину, что и Князь, но открывается для него иное. Князю сказано (в Ц2) меньше, чем увидено в действительности.

Как князь одержим сомнениями и ждет решающего слова, так (ТО-2) Тайновидец окружен двусмысленными знаками и ждет решающего знамения. Эти знаки перечисляются (ТО-3). Проследим это перечисление, ведя счет знакам, служащим добрыми и дурными приметами (2.1—5.4).

Тайновидец видит Дон. Он темный и зловещий. Это, наверное, к худшему (0 : 1). Но вот с реки послышались крики лебедей. Для Князя (Ц2) они тревожны, но непонятны. Тайновидцу же кажется, что в них слышен голос Той (упомянуто «вещее сердце», которое в применении к Тайновидцу приобретает смысл термина). Это, по-видимому, к лучшему (1 : 1). Но знак неясен, и Тайновидец ищет новых примет.

Он обращает взор к небу. С севера восходит туча (В10). Это знак. Так будет наступать княжеская рать (В11). Туча «возносится» — знак, наверное, опять к лучшему (2 : 1). Но и он не удовлетворяет вполне. Тайновидец припадает к земле. Он слышит рыдания матери, потерявшей сына.

Для Князя испытание примет завершается этим эпизодом: «к земле склонившись головою» (2.3.1), Тайновидец произносит в Ц2 слова пророчества.

Но для Тайновидца испытание примéт не кончено. Рыдания матери — это, понятно, к худшему (2 : 2). Но и этот знак — не решающий. Взор обращается вдаль. Там кружат «ночные птицы» (4.1—2). Это, конечно, к худшему (2 : 3): «И мнози врани необычно собрашася не умолкают грающе, галицы же своею речию говорят... Орли же мнози от устья Дону прилетеша и ту клицаху, ждуще дни грозного и богом изволенного, в не же имат пасти множества трупия человеческого и крови пролитися, яко морския воды» (ЛП, с. 93).

Следующий поворот взгляда — в сторону Руси. Что увиденные здесь зарницы воспринимаются как примета, причем примета к лучшему (3 : 3), говорится уже открытым текстом (4.3—4: зарницы не просто мерцают, а «стерегут князя»).

Теперь герой обращается в сторону татар. Там слышен клекот орлов (5.1). И что это снова примета, причем к худшему (3 : 4), опять сказано прямо (5.2).

Между Русью и татарами — Непрядва. Очередь подать знак за ней. С каждым новым обращением взора (Дон — птицы — небо — земля — даль — Русь — татары — Непрядва) знаки все яснее. Знак Непрядвы — совершенно явственный знак к лучшему (4 : 4) — 5.3—4.

На этой точке равновесия между добрыми и дурными приметами (4 : 4) и свершается главное. Как исполнилось в Ц2 ожидание Князя, искавшего пророчества, так исполняется ожидание Тайновидца, искавшего чуда. Чудо происходит: 6.1—3.

Кто совершает его? Это (ТО-1) светоносная (6.3) владычица, освящающая щит воина (8.3—4) запечатлением своего нерукотворного лика. Нерукотворный лик — личная печать божества (христиане почитают под именем Спаса нерукотворного аналогичное чудо самого Христа). Значит, чудотворная Та — та самая, от кого и могло бы ожидаться чудо накануне 8 сентября. Это не Ты блоковских «Стихов о Прекрасной Даме», а Та, кого готов встретить Тайновидец — Богородица. Ее явление — это, конечно, явление с целью благословить землю.

Встреча Тайновидца с Богородицей явно отсылает к широко известному сюжету пушкинской баллады «Жил на свете рыцарь бедный...» (ТО-2). Ее герой на всю жизнь лишен покоя тем, что «На дороге у креста Видел он Марию-деву, Матерь господа Христа». Речь идет не просто о потрясенности чудом. Здесь нечто иное: «С той поры, сгорев душою, Он на женщин не смотрел И до гроба ни с одною Молвить слова не хотел». На щите у этого пушкинского рыцаря появляется латинский девиз (правда, рукотворный — начертанный кровью), означающий «Славься, Матерь Божья», а в бой он бросается с восклицанием, смысл которого (восклицание тоже латинское) — «Свет небес, святая Роза!».

На фоне этого протосюжета не только проясняется смысл переживаний героя по поводу чуда, но становится возможным уточнить коммуникативный жанр речи Тайновидца в Ц3.

3.3. Коммуникативный жанр, хронология и смысл

Если текст Ц3 — обращение героя к Богородице, то по жанру это должна быть (ТО-3) молитва. В таком случае когда и в связи с чем может быть она вознесена? Ответ могли бы дать свидетельства (ТО-1) 1.1. и 8.1. Но 1.1 неоднозначно:

1.1=1) в ту ночь, когда... (придаточное определительное); 2) в эту ночь, когда... = сегодня ночью, когда... (придаточное времени—уточняющее). Выбор предрешает сопоставление 1.1 с 8.1: в контекст вписывается только смысл 2 (B12).

Итак, весь текст обрамлен временным сопоставлением: «Сегодня ночью, когда враг занял свои рубежи, я видел Твое нисхождение; утром же, когда он двинулся, Твой лик оказался запечатлен на моем щите». Днем шла битва. От «сегодня» остается только вечер. Значит, Ц3 — молитва Тайновидца после боя, оставившего его в живых. Теперь, когда небесная встреча с Богородицей отложилась на неопределенное время, герой и воссылает ей молитву, открываясь ей в пережитом накануне — не столько молясь, сколько исповедуясь.

Единственное место в этой исповеди, оставшееся неразъясненным — 1.4. ТО-4 (B13) дает толкование: 1.3—4=Мне известно, что с нами была Ты, но разве могла Ты предвидеть («разве знала»), что твое присутствие откроют? = Тебе не в чем посетовать на себя за раскрытие твоей тайны.

Тайновидец ведет себя (ТО-3) как Онегин в его любовном письме к Татьяне: «Предвижу все. Вас оскорбит Печальной тайны объясненье. Какое горькое презренье Ваш гордый взгляд изобразит!» Вряд ли это должно удивлять. Речь идет о естественном для «бедного рыцаря» восприятии своего присутствия (особенно невольного) вблизи Дамы сердца как недостойного ее небесной святости. Богородицу в понимании ее паладина должно повергнуть в скорбь известие, что она невольно оказалась зрелищем для смертного. Отсюда и жанровое пре-

ображение молитвы в исповедь. В этой исповеди и старательно сдерживаемое торжество осчастливленного нежданной встречей рыцаря, и маскирующие это торжество покаянные оправдания с мольбой не оскорбиться и объяснениями, как обстояло дело.

Небезразлично для дальнейшего, что замеченные Тайновидцем брачные атрибуты Непрядвы (5.3—4) относятся не к нему, преданному своей небесной госпоже-возлюбленной, а к Князю (Непрядва — «как княжна»: 5.4). Князь же (п. 2.2.2) перед лицом невесты — Непрядвы вспоминает «светлую жену».

Ц4
1.1 Опять с вековою тоскою
1.2 Пригнулись к земле ковыли.
1.3 Опять за туманной рекою
1.4 Ты кличешь меня издали...
2.1 Умчались, пропали без вести
2.2 Степных кобылиц табуны,
2.3 Развязаны дикие страсти
2.4 Под игом ущербной луны.
3.1 И я с вековою тоскою,
3.2 Как волк под ущербной луной,
3.3 Не знаю, что делать с собою,
3.4 Куда мне лететь за тобой!
4.1 Я слушаю рокоты сечи
4.2 И трубные крики татар,
4.3 Я вижу над Русью далече
4.4 Широкий и тихий пожар.
5.1 Объятый тоскою могучей,
5.2 Я рыщу на белом коне...
5.3 Встречаются вольные тучи
5.4 Во мглистой ночной вышине.
6.1 Вздымаются светлые мысли
6.2 В растерзанном сердце моем,
6.3 И падают светлые мысли,
6.4 Сожженные темным огнем...
7.1 «Явись, мое дивное диво!
7.2 Быть светлым меня научи!»
7.3 Вздымается конская грива...
7.4 За ветром взывают мечи...

31 июля 1908

4.1. Герой, ситуация

Ц4, подобно Ц2 и Ц3 — монолог некоего героя. Монолог Ц2 приурочен ко времени непосредственно перед сражением, монолог Ц3 — ко времени непосредственно после сражения.

В Ц4 имеются ясные указания на то, что этот монолог приурочен ко времени, когда битва в разгаре (4.1—2; 7.4). С другой стороны, по крайней мере одно место в тексте однозначно указывает, что время действия — ночь (5.3—4). Между тем битва (что вполне понятно) шла днем. Известно даже точное время, и Блок не мог его не знать, поскольку помнил о ночном тумане (3.5.3; 3.6.1), зафиксированном документально и заставившем отложить начало битвы до полудня (ЛП, с. 292). Сражение шло 3 часа (ЛП, с. 21), не считая продолжавшегося до вечера преследования разгромленных татар (ЛП, с. 301).

Такое хронологическое несоответствие требует комментария (п. 4.4), но не может отменить показаний 4.1—2 и 7.4: монолог произносится во время битвы.

Кто же герой? Не один ли он из уже известных по Ц2 и Ц3 персонажей? Текст дает однозначный ответ: нет. И Князь, и Тайновидец — участники битвы. Герой Ц4 — не там, где идет бой (ТО-1): он в ковыльном поле на свободном пространстве, где есть простор «рыщущему» коню (1.1—2; 5.2); битву он только слышит — она достаточно далеко, чтобы гром мечей перекрывался свистом ветра (4.1—2; 7.4).

Очевидно также, что герой здесь один (3.1—3) — все на поле сражения.

Итак, герой Ц4 — новый, третий герой цикла. Назовем его пока условно — Всадник.

Чтобы понять смысл монологов Князя и Тайновидца, нам понадобилось выяснить внутренние импульсы их речи. Мы задавались вопросом: чего они ждут, какова целевая установка их самоотчета? Поступим так же и сейчас. Чего хочет добиться от себя Всадник своим внутренним монологом?

Ответ в тексте есть. Всадника раздирает некая внутренняя дилемма: он не может сделать выбор между каким-то «светом» и какою-то «тьмой» (6.1—4) и взывает к кому-то о помощи в этом выборе (7.1—2). Выбор должен решить, что ему «делать с собою» (3.3). Таким образом, весь монолог Всадника — попытка принять некое трудное для него решение.

Следствие: целевая структура речи в Ц4 повторяет целевую структуру Ц2 и Ц3. И Князь, и Тайновидец выходят в речь, оказавшись перед непосильным для них выбором. И тот, и другой захвачены сомнениями и неуверенностью. Оба ждут помощи со стороны. Один получает се в Пророчестве, другой — в Чуде. Сомнениям и тревоге кладется конец.

Отличие структуры Ц4 от Ц2 и Ц3 — в отсутствии желанного для героя исхода. Та, к кому герой взывает о помощи, отвечает молчанием (7.3—4).

Ситуация Ц4 прояснилась, но одновременно выявился целый пласт загадочного. В Ц2 и Ц3 вполне ясным оказалось, какие именно сомнения мучат героев, чего они ждут. «Свет» и «тьма», раздирающие душу Всадника, такой определенностью не обладают. Смысл его главного стремления (7.2) остается неясен. Необходимо комментирование.

4.2. Сюжетные предпосылки

Самоотчет героев Ц2 и Ц3 начинался с фиксации видимого и слышимого (степь, Дон, птичьи крики...), и эти реальности окружения сразу же наделялись обнадеживающим или зловещим смыслом. На фоне этих оценок воспринимаемого и прояснялось содержание тревожащей героя альтернативы. Не повторена ли эта схема в Ц4 (ТО-2)?

Именно фиксация видимого и слышимого составляет содержание первых двух строф, а третья присоединяется к ним по модели, которую можно представить, например, таким образом (ТО-3):

Звучат последние гудки. Расходятся провожающие. И я с тоскою думаю о неизбежности расставаний.

Эта модель предполагает осмысление связи третьей строфы с первыми двумя по схеме «стимул— результат»: Вот что я вижу и слышу — и это рождает во мне тоску и лишает меня сознанья цели.

Следствие: за перечислением реальностей в 1.1—2.4 скрыта ясная для героя (но пока не для нас) цепь причин, повергающих его в эти переживания. Чем же так мучительны для Всадника перечисляемые в 1.1—2.4 реальности? Если бы так угнетали его сами по себе «дикие страсти» (2.3), его состояние можно было бы понять. Но и в этом случае возникает загадка. «Дикие страсти» для Всадника — это, конечно, рокочущая «сеча» (4.1). Для героев Ц2 и Ц3, однако, это была не сеча, а битва за святое дело (2.3.3—4), осененная светлым стягом (2.2.3) и нерукотворным ликом (3.8.3—4) Богородицы.

Но даже прокомментировав это несоответствие (В14), мы не облегчим себе понимание того, почему в ряду терзающих героя неустройств на равных с «дикими страстями» выступают пригнувшийся ковыль (1.2), чей-то дальний зов (1.4) и какие-то пропавшие кобылицы (2.1—2). Что между ними общего?

Подсказку дает сам текст (ТО-1), приравнивая 1.4 к 1.2 указателем «опять» (1.1; 1.3). Общим между обстоятельствами 1.4 и 1.2 оказывается как минимум то, что они возникают и исчезают совместно: то и другое уже было, то и другое на какое-то время прекращалось, теперь то и другое вернулось. То же относится, очевидно, и к 2.1—4: пока не было первых двух обстоятельств, не было и двух других.

Обстоятельство 1.3—4 названо неоднозначно (ТО-4): 1.3—4 =

1) Ты, ранее слышимая, потом долго молчала, и вот снова издали раздался твой зов;

2) Ты, ранее слышимая лишь издали, потом была рядом со мной — слышимая и видимая вполне отчетливо, и вот снова ты исчезла — голос слышится опять издали и неизвестно откуда — все скрыто туманом.

Понимание 1 неприемлемо: получилось бы, что герою было хорошо, пока Та молчала, а когда подала голос — стало плохо. Между тем в тексте прямо свидетельствуется, что появление Той рядом для героя искомое благо и спасение (7.1—2).

Таким образом, смысл 1.3—4 соответствует толкованию 2 (отметим, что в этом случае логического ударения требует последнее слово строфы). Можно предположить, что ключ к совместности ковыля, кобылиц и диких страстей найден: исчезла Та — и исчезло все, что составляло жизнь. Смысл 1.1—2.4 складывается в этом случае так: когда-то степь с ее клонящимся ковылем была (для героя) воплощением вековой тоски в мире диких (а не человеческих) страстей. Но явилась Та — и все преобразилось: даже степь в этом мире освобожденных человеческих (и связанных диких) страстей, забыв свою вечную тоску, ожила табунами кобылиц. Но вот снова исчезла в какой-то дали Та — и все вернулось: опять освобождены («развязаны») дикие страсти и лишившееся жизни и движения (кобылицы!) степное пространство снова погрузилось в ковыльную тоску. И река затуманилась (1.3), и луна стала ущербной (2.4), и человек почувствовал себя волком (3.2).

Полученное толкование будет подтверждено, если обнаружится его согласуемость с 3.3—4, поскольку именно здесь герой ставит своим мучениям окончательный суммирующий все симптомы диагноз. Но 3.4 неоднозначно (ТО-4): 3.4 =

1) Куда мне лететь, чтобы выполнить твою волю? = Мне непонятно, куда меня зовет твой клич;

2) Куда мне лететь, чтобы найти тебя? = Мне непонятно, откуда раздается твой зов.

Понимание 1 не согласуется с толкованием, полученным для 1.3—4. Следовательно, должно быть принято 2, но как раз 2 предполагало бы такое понимание 1.1—2.4 в целом, какое опробовано выше.

Теперь на вопрос о том, какие сомнения мучат Всадника, получен ответ: было хорошо, пока я знал, где ты; стало плохо, потому что, как уже бывало когда-то, я больше не знаю, где ты; я буду знать, что делать с собою, когда найду тебя.

Сюжетный импульс речи ясен. В отличие от героев Ц2 и Ц3, Всадник озабочен не исходом битвы. Для него судьба решается не ею, а исходом поисков Той. В таком случае логика речи предполагает (ТО-3), что строфы 4—7 должны развертывать сюжет этих поисков, как в Ц3 развертывался сюжет поисков решающего знамения, а в Ц2 — сюжет поисков решающего слова. Этот сюжет и предстоит комментировать.

4.3. Коммуникативный сюжет

Тайновидец в Ц3 искал знамения, то вслушиваясь вдаль, то вглядываясь в небо, то припадая к земле (п. 3.2). Проверим, не повторяется ли тот же сюжетный принцип в Ц4 (ТО-2).

Текст отвечает: да. Действительно, 3.4 = Где сейчас ты? (п. 4.2), и вслед за этим вопросом выстраивается серия разворотов ищущего взора. Где ты — там, где битва? И Всадник вслушивается в звуки боя (4.1—2). Следующий поворот взгляда — в сторону Руси. Там «широкий и тихий пожар», т. е. те самые разгоревшиеся «тихие зарницы» (3.4.3), которые «стерегут князя» (3.4.4).

Но ни там, где слышны татары, ни там, где высвечивается Русь, голоса Той не слышно. Всадник продолжает метаться (5.1—2), и его следующий взгляд — в небо (5.3—4). Там те же тучи, в которые всматривался Тайновидец, но для Всадника молчат и они: они «вольные» (5.3) и «встречаются» на равных — не возносясь и не сползая, как тучи в Ц3. Над головой так же «мглисто» (5.4), как «туманно» вокруг (1.3). Ситуация, классически выраженная Тютчевым: «Над вами светила молчат в вышине, Под вами могилы — молчат и оне» (Два голоса).

Последний поворот взгляда — внутрь себя. Здесь «вздымается» (В15) именно то, что должно привести героя к утраченной Той — «светлые мысли» (6.1). Фон для них явно воспроизводит и переосмысляет световое устройство окружающего Всадника пространства. Внизу, как и на земле, тьма, но это уже «темный огонь» (6.4), приравнивающий это дно души к аду. Но и небо души, как небо над головою, остается темным: заряды внутреннего света не достигают его (6.3—4). Найти Ту равносильно тому, чтобы удержать взмывающий свет в небе души, превратив это небо в господствующий над глубинным адом рай.

Если бы ищущий взор героя отыскал Ту в своей душе — так и должно было бы произойти. Но так не происходит. Той нет и здесь. Тогда-то и раздается вопль о помощи (7.1—2), на который почти пародийно отвечает лишь «вздымание» (то же слово, что в 6.1!) гривы белого (5.2) коня, падающей в звуках битвы (7.3—4— ср. «темный огонь» в 6.4), которая продолжает манить героя к себе («взывают мечи» — 7.4), ибо в душе его ад сильнее света, ибо он «волк» (3.2), он «рыщет» (5.2), влекомый рокотом «диких страстей» (а иначе зачем бы он, не вмешавшийся в бой, метался здесь?).

Остается понять, что удерживает Всадника на этом рубеже, не позволяя аду победить окончательно и преграждая герою путь к полю сражения чуть ли не вопреки его желанию. Что заставляет его продолжать отчаянные поиски Той? В тексте есть (ТО-1) прямой, но явно недостаточный ответ: 5.1. Эта фраза неоднозначна (ТО-4): 5.1=

1) испытывая могучее чувство тоски;
2) находясь в могучей власти тоски.

Понимание 1 неприемлемо, ибо означало бы, что герой исполнен силы, пусть придаваемой тоской. Он же чувствует себя «растерзанным» (6.2) и взывает о помощи (7.1—2). Следовательно, верно 2 — силой исполнен не герой, а тоска, и вся фраза соответствует модели (ТО-3) вида: Он охвачен мощными цепями.

По свидетельству 5.1, герой Ц4 почему-то ощущает себя невольником. Что это не случайность, подчеркнуто параллельной фразой 5.3: нет никакого смысла задумываться над «вольностью» туч тому, кто не томим ощущением собственной неволи. В той же строфе неожиданно упоминается цвет коня (5.2), и в ней же — невероятное сообщение о ночном небе (5.4) над полем битвы. Равная немотивированность этих цветосветовых эффектов и упоминаний о несвободе Всадника заставляет предположить, что их параллельность — симптом скрытой связи между ними (ТО-3). Эта гипотеза требует сбора показаний относительно цветосветового устройства мира в Ц4 (ТО-1).

В Ц2 и Ц3 тьма была внизу (темная степь — 2.1.1; 3.1.3; 3.2.2; темная река — 3.2.1; черная туча орды — 3.8.1—2), а свет, как и следует, пребывал над тьмой или нисходил сверху (светлый стяг над полками — 2.2.3; зарницы над Русью — 3.4.3; светлый туман над Непрядвой — 3.5; светоносное нисхождение свыше — 3.6.3—3.7.2). В двух отмеченных случаях в Ц4 на этом фоне обращает на себя внимание параллельная перевернутость световых реальностей: белый конь оказывается под темным (пусть и не в прямом смысле — 6.4; 7.2) всадником; ночное небо — над землей, где должен бы царить день. Под этим небом, как под тяжестью, распластывается («широкий пожар» — 4.4; ср. с «зарницами» в 3.4.3, т. е. вспыхивающими, взмывающими разрядами света) свечение. Тяжестью — «игом» (2.4) — оказывается и «ущербная» (2.4; 3.2) луна, т. е. луна не столько светящая, сколько владычествующая над тьмой. Пластом тьмы, как уже выяснено, придавлен и свет в душе героя (6.1—4). Не просто несвободен, а придавлен (игом луны) и сам герой (3.2), «пригнулся» даже ковыль (1.2).

Под прослойкой света, придавленного тьмой («тихий пожар» на земле и «светлые мысли» в душе), та же стихия тьмы (темная или по крайней мере туманная— 1.3 — земля и «темный огонь» в подземелье души).

Таким образом, световая картина в Ц4 — ситуация световой ловушки. Тьма сверху и снизу почти сомкнулась, но окончательно этого не дает ей сделать свет, который, однако, готов улетучиться, если бы не та же тьма, распластавшая и сковавшая его внизу. Это очень напоминает неволю Всадника, который готов стать окончательно волком, но именно волчьей своей реакцией на тьму (3.2) и парализован, так что в нем продолжает метаться свет, попавший в ловушку тоски.

Все это дает возможность предположить, что хронологический парадокс Ц4 (битва ночью) — ключ к разгадке героя, как психологический парадокс (безразличие к исходу битвы) оказался ключом к разгадке сюжета. Прокомментируем его.

4.4. Согласование времен

Хронологический парадокс Ц4 (битва происходит ночью) можно интерпретировать тремя способами: счесть его простой неосмотрительностью автора; предположить, что время битвы сознательно перенесено на ночь с какими-то смысловыми целями; предположить, что в Ц4 изменено не время битвы, а система измерения времени.

Уже показано (п. 4.3), что в Ц4 световая картина мира противоположна обычной — обычной и для здравого смысла, и для других текстов Ц. Это наводит на мысль, что последнее из предположений наиболее реалистично (ТО-3). Кроме того, для первых двух предположений в Ц не обнаруживается оснований. Обнаруживаются ли они для третьего (ТО-1)?

Кто бы ни был герой следующего стихотворения (Ц5), он начинает свой монолог странным указанием на время: 5.1.1—2. На обычном языке мгла «сходит», «опускается»; «восходит», напротив, светило (как правило, дневное — солнце). Восходом отмечается начало дня, закатом, ниспадением мглы — конец. В Ц5 восходом мглы — т. е. закатом — отмечено именно начало (дней): 5.3.1—2.

Это означает, что в Ц в принципе возможна такая система отсчета времени героем, когда начало суточного времени — ночь, а конец, соответственно, день. Приход тьмы для такого героя — восход. С этим восходом люди перестают видеть и слышать (погружаются в сон: 5.2.1—4), герой же как раз начинает видеть, слышать и понимать (5.3.1—5.4.4). Для такого героя приход света должен оказаться закатом: люди начнут бодрствовать, к ним вернется зрение, слух и понимание — герой же утратит эту способность; свет для него — ночь.

Если предположить, что герой Ц4 ведет отсчет времени по той же схеме, что и герой Ц5, то окажется: время битвы для него и для прочих оценивается по-разному. Для людей время представляется днем (оно наступает после восхода солнца), для героя время света представляется ночью (оно длится до восхода тьмы). Свет дня делает людей зрячими, но для героя он — свет ночи, то есть тьма — то, что лишает зрения.

Такая гипотеза поддается косвенной проверке (ТО-2). Главный герой Д, Герман, чьи обстоятельства уже нашли себе параллель с обстоятельствами Ц2 (п. 2.2.2), оказывается в один из моментов своего развития предельно близок герою Ц4, Всаднику. Он говорит о чувствах воина, не имеющего возможности броситься в бой. И Герман же оказывается в Д связан с идеей вечной ночи, за пределы которой не может вывести обычная смена времени суток (В16).

Немаловажно, что русская литература знает классический образ всадника, скитающегося с закрытыми глазами, т. е. несущего в себе вечную ночь. Это спящий рыцарь в «Страшной мести» Гоголя, переклички которой с Ц отмечены литературоведами [7]: он скитается по Карпатам, ожидая дня страшной мести своему преступному брату-колдуну. «Блещут чеканенные латы; на плече пика; гремит при седле сабля; шелом надвинут; усы чернеют; очи закрыты; ресницы опущены — он спит. И, сонный, держит повода...» (Страшная месть, XII). Пока длятся эти скитания, разворачивается кровавый сюжет «Страшной мести» — среди людей бушуют дикие страсти, в которые до установленного часа не вмешивается спящий всадник.

Есть и почти прямое свидетельство (ТО-1) в тексте Ц4: 7.2. Герой взывает к Той не о ее свете, он просит возвратить ему собственный свет — свойство «быть светлым». Ущербная луна, дважды упомянутая в Ц4, оказывается в таком случае не светилом, сменяющим солнце, а светилом, господствующим в мире ночи, где живет Всадник, в противовес солнцу — светилу, господствующему в мире дня, где живут другие.

Сама мысль о внутреннем светиле, которое не покидает своего небосвода ни в какое время суток, не является чем-то необычным для поэтического мышления, ср.: «Ты дышишь солнцем, я дышу луною, Но живы мы любовию одною» (Ахматова А. Не будем пить из одного стакана...).

Но все же главное — это то, что лишь предположение о мире вечной ночи, поглотившем Всадника, позволяет естественно связать воедино хронологическую странность в Ц4, перевернутость светового ландшафта, отсчет времени от заката в Ц5, смысл мольбы Всадника и подчеркнутость его несвободы. Он, применяя к случаю известную библейскую формулу, низвергнут во тьму внешнюю, где плач и скрежет зубовный (В17). Тьма смыкается в Ц4 подобно челюстям ада — «геенны» с ее «темным огнем». Герой одновременно теряет свободу и слепнет: он не только перестает видеть Ту, он и речь свою строит как бы вслепую — с неожиданными повторами (1.1 и 3.1; 2.4 и 3.2; 6.1 и 6.3) и срывами рифм (2.1—2.3; 6.1—6.3).

Как и для Ц2, оставим пока в стороне лишь один вопрос — вопрос о том, кто такая Та: ее, как и «светлую жену» в Ц2, идентифицировать сложнее, чем Богородицу-возлюбленную в Ц3.

Ц5

И мглою бед неотразимых
Грядущий день заволокло.
Вл. Соловьев.

1.1 Опять над полем Куликовым
1.2 Взошла и расточилась мгла
1.3 И, словно облаком суровым,
1.4 Грядущий день заволокла.
2.1 За тишиною непробудной,
2.2 За разливающейся мглой
2.3 Не слышно грома битвы чудной,
2.4 Не видно молньи боевой.
3.1 Но узнаю тебя, начало
3.2 Высоких и мятежных дней!
3.3 Над вражьим станом, как бывало,
3.4 И плеск, и трубы лебедей.
4.1 Не может сердце жить покоем,
4.2 Недаром тучи собрались.
4.3 Доспех тяжел, как перед боем.
4.4. Теперь твой час настал. — Молись!

23 декабря 1908

5.1. Ситуация, сюжет

Ц5, как и Ц2—Ц4, — монолог от первого лица: 3.1. Время речи указано точно: 1.1—2=Опять настала ночь. Такую фразу нельзя понять как относящуюся к какой-то ночи через пять дней, через год и т. п. после некоторой предыдущей ночи. Опять=после непосредственно предшествующего одноименного времени суток. Но в Ц речь шла об одной-единственной ночи— ночи перед битвой. Следовательно, время Ц5 — ночь после битвы. Между Ц2 и Ц5—сутки и два монолога: Ц4 (днем, во время битвы, от лица живущего в ночном мире героя) и Ц3 (вечером, после битвы, с рассказом о событиях ночи).

Место действия обозначено столь же отчетливо: герой на Куликовом поле (1.1), опустевшем после сражения. Достаточно ясно дано понять, что он здесь один: 2.1.

Если бы не опыт, имеющийся после толкования Ц2—Ц4, было бы нелегко понять, что делает здесь герой. Но ситуация уже узнаваема (ТО-2). Как и в Ц2—Ц4, перед нами некто, ушедший в одиночку в безлюдную степь смотреть, слушать и делать свой выбор.

Его действия складываются в сюжет, повторяющий сюжет Ц3: как и Тайновидец, герой Ц5 ведет счет реальностям окружения, обнажающим перед его взором свой скрытый смысл. Он видит тьму (1.2—4; 2.2) и слышит тишину (2.1), но прозревает за ними сверканье молнии (2.4) и гром некоей битвы (2.3)—(В18). Прозревает он их в грядущем, их еще нет (так Тайновидец прозревал грядущие рыданья матери), и 3.1 вводится союзом «но» по модели (ТО-3) такого вида: Я еще не говорил с ними. Но их ответ мне уже ясен. 3.1—2=Смысл мглы и тишины мне уже ясен. А вражий стан с его уже знакомыми нам лебедями (2.1.3) герой не только понял, но и слышит (3.3—4).

Сюжет, как в Ц3 и Ц4, развертывается через смену направлений взора. Последовательность тоже знакома: даль — небо — сам герой. В небе — все те же тучи. В Ц3 они предрекали победу, в Ц4 молчали; герою Ц5, подтверждая увиденное в глубинах дали, предвещают бой (они собрались «недаром»: 4.2). Знамение обнаруживает герой и в себе: ощущение тяжести доспеха — говорящее, оно — «как перед боем» (4.3). Герой видит, что сомнений быть не может: 4.4. Это — формула принятия решения. Она, однако, неоднозначна (ТО-4): 4.4=

1) До сих пор твое время еще не наступало, но вот оно и пришло (понимание 1 предполагает логическое ударение не «настал»);

2) До сих пор было время других, и только сейчас пришло время, отведенное тебе (понимание 2 предполагает логическое ударение на «теперь»).

При 2 предполагаются другие, действовавшие до сих пор и переставшие действовать теперь, когда выходит на сцену герой. При понимании 1 другие вообще не предполагаются — речь идет только о времени бездействия и времени действия героя. В контексте Ц ясно, что на другую ночь после битвы «другие» не иметься в виду не могут. Это они погружены сейчас в «непробудную тишину» — и для живых, и для мертвых битва кончена.

Итак, верно 2: была битва земная; это была битва для других — не для героя Ц5; теперь же предстоит «битва чудная» (2.3 — т. е. волшебная, «трансцедентная», выражаясь языком философов), незримая для мира. Вот эта-то битва — для героя Ц5. Он будет в ней сражаться с кем-то или с чем-то в одиночку.

5.2. Герой

Достигнутое понимание ситуации делает героя узнаваемым. По-видимому, не случайно и общее для Ц5 и Ц4 перевернутое время (п. 4.4). Именно герой Ц4 не принимал участия в битве земной и звал к себе «дивное диво» (4.7.1), как герой Ц5, дождавшийся финала земной битвы, ждет для себя «битвы чудной».

Отметим и то, что герой Ц4 — в отличие от героев Ц3 и Ц2 — не дождался осуществления своих ожиданий. Позиция ответа на зов в Ц4 осталась пустой. Между тем Ц5, в отличие от Ц2—Ц4, не содержит никаких знаков первоначальной неуверенности или встревоженности героя. Он обозревает свои приметы, но без всяких сомнений относительно их смысла: он видит только подтверждения уже понятого им. Герой Ц4 молил дать ему «стать светлым». Герой Ц5 светел — он отчетливо видит именно во мгле, как герой Ц4 был темен — не видел при свете.

Мгла для героя Ц5 еще «восходит», но ждет он уже именно дня: наступающий день возвращает его из мира ущербной луны в мир солнца. Мгла, хотя еще и «восходит», но оказывается, как ей и следует, внизу: она «разливается» (2.2). Свет ожидается сверху — там вот-вот сверкнет молния (2.4). Сердце больше не растерзано — оно в покое, которым не собирается жить

дальше (4.1), который сменил растерзанность Ц4 лишь ради того, чтобы герой знал, «что делать с собою» (4.3.3).

Ц5 целиком вкладывается в ту пустующую позицию Ц4, которая соответствует позиции Пророчества в Ц2 и позиции Чуда в Ц3.

Если сомнения в том, что герой Ц5 — это дождавшийся желанного просветления Всадник из Ц4, еще остались, их развеет эпиграф. Он отсылает к стихотворению В. Соловьева «Дракон». Приводим его полностью: B19. В нем отражена ситуация, соответствующая не одному Ц5, а комплексу Ц4+Ц5. Здесь и беспечность людей, исполнивших долг «меченосной рати», а теперь ликующих в иллюзорном «вечном мире» и не видящих «грядущих бед» — дракона. Здесь и герой, который, пока меченосная рать сражалась, был верен «знамени креста» и не вмешивался в битву, веруя в вышнюю любовь, которая «зовет нас всех равно». Но вот показался «дракон», видимый ему одному, и он ощутил себя «наследником меченосной рати» — понял, что «крест и меч — одно». Настал час его одинокой битвы.

Стихотворение В. Соловьева имеет посвящение — Зигфриду. Зигфрид — герой древнегерманского эпоса, волновавший мысль не только В. Соловьева — философа и поэта, боготворимого Блоком, но и самого Блока. В «Возмездии» миссия поэта осмыслена Блоком через этот образ: «Так Зигфрид правит меч над горном... Удар — он блещет, Нотунг верный, И Миме, карлик лицемерный, В смятеньи падает у ног». Нотунг — волшебный меч, которым легендарный Зигфрид поражает дракона, завладевшего чудесным золотым кольцом, дающим власть над миром. Миме — могущественный карлик, пытающийся сделать Зигфрида своим орудием.

Легенда воспринята Блоком в преломлении Р. Вагнера, создавшего грандиозную оперную тетралогию «Кольцо Нибелунгов» (третья из этих опер — «Зигфрид») и сделавшего акцент на предызбранности Зигфрида для битвы с драконом: волшебный Нотунг разбит, и Зигфрид рожден восстановить его и свершить свой вселенский подвиг. В. Соловьев соединил языческого Зигфрида с идеей христианского подвижничества. Его Зигфрид — христианский святой, вооружившийся Нотунгом.

Блок явно отождествлял В. Соловьева с Зигфридом его «Дракона»: «Рыцарь—монах» (РМ) — так назвал Блок свою статью 1910 года, посвященную памяти В. Соловьева. У блоковского Соловьева все — «только средство: для рыцаря — бороться с драконом, для монаха — с хаосом, для философа — с безумием и изменчивостью жизни», а конечная цель ставится глобально: «Все мы, насколько хватит сил, должны принять участие в освобождении плененной Хаосом Царевны — Мировой и своей души. Наши души — причастны мировой. Сегодня многие из нас пребывают в усталости и самоубийственном отчаянии: новый мир уже стоит при дверях...» (РМ, с. 170—171). Это (ТО-2) голос героя Ц4, верящего, что его будущее — будущее Зигфрида, идеал которого явлен личностью Соловьева.

Итак, герой Ц4, условно именовавшийся здесь Всадником, и герой Ц5 — одно лицо. Всадник — грядущий Зигфрид, герой Ц5 — Зигфрид уже состоявшийся: рыцарь, готовый к своему подвигу.

Отметим перекличку (общий германский колорит) имен Зигфрида и героя Д — Германа, остающегося в положении мечущегося, но так и не выбравшего своего стана и не дождавшегося своего часа бойца. В этом смысле можно было бы сказать, что герой Ц4 — это Зигфрид в облике (и в стадии развития) Германа, а герой Ц5 — Герман, выросший в Зигфрида.

5.3. Интерпретация

Комментарий к Ц5 в собственном смысле слова можно считать завершенным, однако некоторые дополнительные разъяснения кажутся необходимыми. Ясно, что Всадник-Зигфрид — центральный, авторский герой цикла. Поэтому его внутренняя позиция, его обличье рыцаря-монаха нуждаются в общеисторических пояснениях. Дадим их предельно сжато, отсылая за деталями к блоковским произведениям.

Одна из центральных идей блоковского понимания истории состоит в том, что существуют особые эпохальные переломы в жизни человечества, когда судьба решается не столкнувшимися в битве враждебными лагерями. Так, «в первом столетии нашей эры... мир, как и у нас в Европе, был расколот прежде всего пополам... Но... все явственнее был слышен какой-то третий звук... Я говорю, конечно, о третьей силе, которая тогда вступила в мир и — быстро для истории, томительно долго для отдельных людей — стала равнодействующей между двумя мирами, не подозревавшими о ее живучести. В те времена эта сила называлась христианством» (ВС, с. 343—344).

Это сказано в произведении, ставшем одним из итоговых для Блока: статья «Владимир Соловьев и наши дни» датирована 1920 годом. Главная мысль статьи — мысль о сходстве революционной эпохи в России (и вообще в Европе) с переломной эпохой начала новой эры. Битва двух миров ведется в преддверии победы неведомого третьего: «имени он еще не имеет», «третья сила далеко еще не стала равнодействующей и шествие ее далеко не опередило величественных шествий мира сего» (ВС, с. 346). Это понимание хода истории воплощено в символическом финале поэмы «Двенадцать».

Статья заканчивается прямой параллелью между личностью В. Соловьева и героем Ц: «Вл. Соловьев, которому при жизни «не было приюта меж двух враждебных станов», не нашел этого приюта и до сих пор, ибо он был носителем какой-то части этой третьей силы, этого, несмотря ни на что, идущего на нас нового мира» (ВС, с. 346).

Куликовская битва для Блока — «символическое событие», событие как раз из тех, где битва решается не в сражении, а в грядущих «высоких и мятежных днях». В С Блок говорит о противостоянии народа и интеллигенции, отождествляя его с противостоянием Руси и татар на Куликовом поле. В этом контексте Блок ощущает себя представителем «татарвы», осознавшим, однако, что не о победе над противником (духом народа) надо заботиться. Доказать это своим собратьям — интеллигенции — главная цель Блока в С.

Если блоковский Всадник-Зигфрид — автогерой, то это не один из русского воинства, отказавшийся от участия в земной битве, а некто из татарского стана, пришедший было к месту сражения, но остановившийся, охваченный «тоскою могучей».

Здесь время прервать общеисторические пояснения и обратиться к оставленному пока в стороне первому стихотворению цикла.

Ц1 1.1. Река раскинулась. Течет, грустит лениво

1.2. И моет берега.
1.3. Над скудной глиной желтого обрыва
1.4. В степи грустят стога.
2.1. О, Русь моя! Жена моя! До боли
2.2. Нам ясен долгий путь!
2.3. Наш путь — стрелой татарской древней воли
2.4. Пронзил нам грудь.
3.1. Наш путь — степной, наш путь — в тоске безбрежной,
3.2. В твоей тоске, о Русь!
3.3. И даже мглы — ночной и зарубежной —
3.4. Я не боюсь.
4.1. Пусть ночь. Домчимся. Озарим кострами
4.2. Степную даль.
4.3. В степном дыму блеснет святое знамя
4.4. И ханской сабли сталь...
5.1. И вечный бой! Покой нам только снится
5.2. Сквозь кровь и пыль...
5.3. Летит, летит степная кобылица
5.4. И мнет ковыль...
6.1 И нет конца! Мелькают версты, кручи...
6.2. Останови!
6.3 Идут, идут испуганные тучи,
6.4 Закат в крови!
7.1 Закат в крови! Из сердца кровь струится!
7.2 Плачь, сердце, плачь!..
7.3. Покоя нет! Степная кобылица
7.4 Несется вскачь!

7 июня 1908

6.1. Герой, ситуация

В Ц2 — Ц5, как мы видели, речь стронлась от лица героев-персонажей: Князь, Тайновидец, Рыцарь (меняющий свой облик в интервале от Германа до Зигфрида). Каждый текст представлял собою монолог, имеющий точную временную, а иногда и пространственную приуроченность: ночь перед битвой в поле на левом берегу Дона (Ц2); час битвы (Ц4); вечер после битвы (Ц3); ночь после битвы на Куликовом поле (Ц5).

Текст Ц1, как и прочие, — монолог от первого лица. Это заставляет задаться вопросом, нет ли и в Ц1 героя-персонажа и не имеется ли в виду конкретное время и географическое пространство.

6.1.1. Текст дает точное указание на время суток: монолог произносится на фоне заката (6.4). Прямых указаний на соотнесенность времени монолога с временем битвы нет, однако закат «в крови», а в лучах этого кровавого заката «идут, идут» тучи, гонимые «испугом» (6.3). Бегство испуганных туч, не будучи прямым указанием на время, звучит достаточно недвусмысленно. Испуг — реакция на предстоящую беду, бегство — на беду близкую. В Ц2—Ц5 тучи реагировали только на людские битвы: накануне битвы вздымалась туча, предвещавшая победу княжеской рати (Ц3), во время битвы вольные тучи сшибались в небесах (Ц4), после битвы земной собравшиеся тучи знаменовали грядущую «битву чудную» (Ц5). Вечернее бегство испуганных туч очевидным образом вписывается в этот ряд. Устрашившая их беда — битва.

Таким образом, хронология Ц1 точно состыкована с суточным интервалом Ц2—Ц5. Монолог произнесен вечером последнего дня перед битвой. Между ним и монологом Тайновидца (Ц3) — сутки (как и между монологом Князя — и заключительным монологом Рыцаря). Разумеется, исчерпывающее обоснование этой гипотезе даст только согласуемость ее с толкованием всего текста.

Указания на место действия в Ц1 менее определенны, но имеются: 1.1—2. Герой монолога — на берегу реки, как и герои Ц2—Ц5 (река в пределах видимости каждого из них). Если тучи над ней бегут действительно для того, чтобы оказаться подальше от битвы, то река — это не некая река вообще. Эта река омывает пространство грядущего боя.

Если это так, в 1.3—4 место действия предельно уточняется. Герой видит на берегу реки — разумеется, на противоположном тому, где находится сам, ибо видит он это «над обрывом», — стога. Стога — это имущество оседлого населения. Их не может быть по правым берегам Непрядвы или Дона. Здесь — кочевая степь, «дикое поле».

Но тогда герой Ц1 — на краю Куликова поля, на его Донском или Непряднинском берегу. Текст дает возможность уточнить и это. «О, Русь моя!» — начинает свой монолог герой (2.1), и нельзя думать, чтобы он произносил этот монолог, не устремляя свой взор в сторону Руси, на русский берег.

Между тем за Донским берегом — Рязанская земля. Это отнюдь не Русь. Это феодальное княжество, до 1521 г. сохранившее самостоятельность и — единственное из русских княжеств — выступившее в 1380 г. в союзе с Мамаем (В2). Русь на севере — за Непрядвой.

Итак, герой Ц1 произносит свой монолог вечером последнего дня перед битвой на Непряднинском краю Куликова поля, находясь по ту сторону русской границы (реки) и адресуя его Руси — земле на противоположном берегу.

6.1.2. Соберем в тексте свидетельства о личности героя. В первую очередь обращает на себя внимание характер его монолога. Герои Ц2—Ц4 вступали в речь совершенно однотипно — в состоянии колебаний, неясности и поисков каких-то решений. Монолог Ц1 непосредственно за обращением к адресату провозглашает, что герою все ясно — даже более чем ясно: «до боли» (2.1—2). Более того, весь монолог пронизан демонстрацией твердости героя, его целеустремленности и уверенности в своей правоте: 3.3—4; 4.1; 5.1; 7.3.

Речь героев Ц2—Ц5 обращена к себе, речь героя Ц1 адресована вовне. Правда, самоотчет Тайновидца в Ц3 включен в рамку обращения к Той, однако это молитва (п. 3.3) — лишь мысленное, а не прямое обращение вовне, по содержанию же — исповедь. Герой Ц1 адресуется вовне — к Руси — прямо: он убеждает ее в чем-то (однозначно убеждающая направленность речи выявлена в 3.3—4.2). Герои Ц2—Ц5 убеждали самих себя. Извне они ждали поддержки (Князь, Тайновидец) или даже помощи (Рыцарь). Герой Ц1 явно ни в чьей помощи не нуждается и едва ли не сам пытается как-то поддержать своими восклицаниями тоскливую (1.4; 3.2) Русь. Его отношение к бою (5.1) разительно контрастирует с чувствами Князя и Тайновидца, нуждавшихся перед боем в пророчествах и чудесах. Герой Ц1 — воплощение силы.

В соответствии с этим речь героев Ц2—Ц5 — явно речь «про себя»; речь же героя Ц1 звучит, очевидно, в полный голос (можно ли представить в исполнении «про себя» восклицательные предложения Ц1?). Это именно речь, а не внутренний монолог-самоотчет, как в Ц2—Ц5.

Эта «громкость» речи героя Ц1 в отличие от «тихости» речи в Ц2—Ц5 — не единственное проявление

контраста громкого и тихого в Ц. Уже выяснилось, насколько значим в Ц контраст светлого и темного (п. 4.3), вертикального и горизонтального (В15). Соберем свидетельства о противостоянии тихого — громкого в Ц2—Ц5.

Князь в Ц2 вслушивается в тишину (2.13—4), он привел с собой друга слушать землю. В Ц3 тишина упоминается уже прямо и подчеркнута неожиданной позицией своего упоминания — «тихие зарницы». Эти тихие зарницы мерцают над Русью (3.4.3—4). Тут же эта тишина противопоставлена шуму над татарским станом— там клекот орлов (3.5.1). Тихий русский стан противопоставлен шумному татарскому и в эпизоде испытания примет «Сказания о Мамаевом побоище»: на татарской стороне Дмитрий Боброк услышал «стукъ великъ и кличь, и вопль... По реце же Непрядве гуси и лебеди крылми плещуще, необычную грозу подающе... И обратився на плъкъ русскый — бысть тихость велика... И рече Волынецъ: «Радуйся, государь, добри суть знамениа...» (ЛП, с. 40). Эта деталь не забыта Блоком и со ссылкой на сказание включена в С (п. 2.1.2).

Кричат татары и в Ц4 (4.4.2). Упомянуты именно крики татар, как если бы русские дрались молча. И тут же снова говорится о тишине, разливающейся на светящемся русском берегу (4.4.3—4). Тишина царит и в Ц5, попадая в совсем уже парадоксальный контекст: это тишина, в которой воплотился грядущий волшебный бой, и к этому бою тихо — молясь! (5.4.4) — готовится Зигфрид, авторский герой цикла. В пространстве шума (в «трубах лебедей» — 5.3.3—4) по-прежнему пребывает враг, причем подчеркнуто: это пространство всегда («как бывало») было для врага родным.

Представление о некоей тотальной «тихости» как атрибуте Руси — не поэтическая выдумка Блока. Традиционное русское мировоззрение так прочно связывало образ тихости с самой идеей святости русской земли, что упоминание тишины фактически вошло в титулатуру русских царей (В20).

Русь явно тиха и в Ц1 (1.1—1.4). Не тих, однако, герой Ц1. Его идеал — вечный бой и топот кобылиц. Он намерен мчаться (4.1), озарять (4.1—2) и блистать (4.3). Героям Ц2—Ц5 он противостоит не только как громкий герой тихим, но и как огнелюбивый — светолюбивым. Герои Ц2—Ц4 все появляются в темноте (даже астрономическим днем — Ц4), к темноте они обращаются за решением мучающих их сомнений, и свет, о котором они мечтают, — незримый свет благословенного стяга и молящейся «жены» (Ц2), святого покрова Богородицы и ее нерукотворного лика (Ц3), спасительных мыслей и спасенного духа (Ц4), не наступившего еще дня и невидимой молнии (Ц5). Видимый же свет ничего для них не озаряет — он «тихий», даже когда разрастается пожаром (3.4.3; 4.4.4), а если и блестит, то «серебряно» (3.7.1).

С огнем связан в Ц2 татарский стан: его граница—горючий, т. е. буквально «горящий» (В7), камень. Этому огню противостоит здесь свет незримого стяга, как в Ц4 «темному огню» духовного ада противостоит свет спасительных мыслей. Именно огонь, огненная мгла (костры в ночи — 4.1—2), сдобренная кровью и пылью (5.1—2), милы сердцу героя Ц1.

Особенно показательное свидетельство о герое Ц1—его пристрастие к кобылицам, которые рисуются его взору обязательно несущимися вскачь (5.3—4; 7.3—4). Разумеется, неравнодушие к коню характерно для представителей почти любой древней и не только древней культуры. Но культ коня, причем в образе не собственно коня, а кобылицы, при этом кобылицы дикой — вольно несущейся в вольной степи — это культ кочевника. При всей значимости связанных с конем реальностей и для русской культуры повышенный интерес к коню в народном сознании мог еще до недавнего времени восприниматься как признак этнической чуждости (В21).

Кстати говоря, трудно представить себе монолог Ц1 в устах пешехода, стоящего на берегу реки: как прозвучит в его устах 4.1, 5.1? Скорее всего, восклицания о кобылицах раздаются из уст всадника, гарцующего над рекой.

Все говорит об одном. Монолог Ц1 — монолог татарского всадника. Если в этом остались еще какие-нибудь сомнения, текст развеет их прямым смыслом сказанного: 2.3—4. Фраза эта неоднозначна, поскольку направления двух синтаксических связей неочевидны: «татарской» — «татарской стрелы» или «татарской воли»? «Воли» — «стрелой воли» или «грудь воли»? Неоднозначна и связанная с этим фраза 2.2: путь пройденный или путь предстоящий? Необходима ТО-4: В22. Получаемое толкование: 2.3—4=Предстоящий нам путь ждет

нас, раня душу своим зовом («пронзив нам грудь стрелой»), к древней татарской воле (=воле, которой всегда обладали татары). Тосковать о древней татарской воле и звать к ней может только татарин.

Герой может считаться опознанным. В контексте Ц он характеризуется, конечно, не столько этнически (ср. уже рассмотренное приложение Блоком противостояния Русь — татары к ситуации народ — интеллигенция: п. 5.3), сколько своей противоположностью героям Ц2—Ц5. В первую очередь — Князю. На это указывает ситуация речи.

Действительно, Князь пришел перед битвой слушать свою землю. Герой Ц1 пришел перед битвой к той же земле не слушать, а сказать ей нечто и в чем-то убедить. О «светлой жене», обращаясь мыслью к Руси, думает Князь. «Жена моя!» — обращается к Руси татарин, а дальше говорит о «ханской сабле» (4.4), как в Ц2 речь шла о княжеском мече.

В 3.1.1 Мамай назван по имени. Судя по форме «залег», он, по сведениям Тайновидца, занял свою позицию непосредственно к ночи. В Ц1 всадник, выехавший к реке, появляется здесь именно в этот момент. Его речь строится по жанровой модели приветствия впервые или вновь увиденным местам («Приветствую тебя, пустынный уголок...» Пушкин А. С. Деревня).

Итак, ситуация Ц1 параллельна ситуации Ц2: это две встречи с землей, за которую будет битва. Параллельны и противоположны друг другу герои этих встреч. Если герой Ц2 — Князь, герой Ц1 может именоваться Антикнязем. Антикнязь в Ц1 увиден в момент его прибытия на занимаемый рубеж. Он окидывает взором открывающуюся картину (1.1—4) и произносит свою речь-приветствие, содержание которой, однако, отнюдь к приветствию не сводится и требует комментирования.

Переходя к нему, отметим еще один параллелизм в мире героев Ц. Рыцарь в Ц4 был уже опознан (п. 5.3) как воин, оторвавшийся от татарского стана. Его, как и Антикнязя, радовала когда-то утопия рая степных кобылиц (4.2.1—2), как и Антикнязь, он противопоставлял их бешеный скок вековой тоске земли (4.1.1—2). Но увидеть он смог больше, чем увидел тот. Ему доступно понимание Той и открыт путь к Зигфридову подвигу. Рыцарь — такой же вещий партнер Антикнязя, как Тайновидец — Князя. Пути у них разные: перед одним —

перспектива Зигфрида, перед другим — пушкинского бедного рыцаря с его романтическим монашеством: «Возвратясь в свой замок дальный, Жил он строго заключен, Все влюбленный, все печальный. Как безумец умер он» (Пушкин, «Жил на свете рыцарь бедный...»). В уже цитированной статье о В. Соловьеве («Рыцарь-монах» — см. п. 5.2) Блок много говорит о том, что «Вл. Соловьев все еще двоится перед нами». Главный — «нездешний» — Соловьев «был «честный воин Христов». Он занес над врагом золотой меч (РМ, с. 167), чтобы «бороться с драконом» (РМ, с. 168), исполняя тем самым миссию Зигфрида. Другой — «здешний», земной Соловьев — как пушкинский герой, «сгорел душою», и его «земной романтизм, странное чудачество — только благоуханный цветок на этой картине. «Бедный рыцарь» от избытка земной влюбленности кладет его к ногам плененной Царевны» — той «Мировой души», которая ждет не поклонения, а освобождения, ибо «страстно тоскует в объятиях Хаоса» (РМ, с. 168).

Противопоставление романтического Тайновидца (героя Ц3) и Тайновидца антиромантического (Рыцаря в Ц4) выдержано до деталей — до разграничения прописной и строчной букв в слове «ты» (В23) и упоминания в С прослезившегося Дмитрия Боброка (п. 3.1) — вопреки источникам протосюжета, по которым испытание примет сопровождалось (п. 2.1.2) слезами князя (В24)

6.2. Коммуникативный сюжет

Коммуникативные сюжеты речей Князя, Тайновидца и Рыцаря все строились по схеме «ожидание—запрос» (колебания Князя, гадания Тайновидца, метания Рыцаря) — «ответ» (пророчество Князю, чудо — Тайновидцу, молчание, а потом явление Дракона— Рыцарю) — «реакция» (обретение решимости — Князем, вечного благословения — Тайновидцем, своего часа — Рыцарем).

Если той же схеме подчинена и речь Антикнязя, то «запрос» — это 2.1—6.2, «ответ»—6.3—6.4, «реакция»— 7.1—4 (В25). Если это не так, то коммуникативный сюжет 1.1—6.2, истолкованный в жанре «запроса», не удастся согласовать со смыслом 6.3—7.4. Поэтому сюжет 1.1—6.2 следует прокомментировать, отвлекшись от 6.3 — **7.4.**

6.2.1. Что увидел Антикнязь на берегу Непрядвы?

«Ленивую» (опять «тихую» — В20) реку, «скудную» глину и во всем этом «грусть» (1.1—1.4), которая оказывается не просто состоянием природы, а той особой «безбрежной» (3.1) и «вековой» (4.1.1) тоскою, которой отмечена одна лишь Русь: 3.2.

Между тем Русь для Антикнязя — жена (2.1). Жена, встреча с которой произошла после долгой разлуки (п. 6.1.2). Она, как видно, и не собирается встречать разгоряченного всадника: она «раскинулась» тоскливой рекой, выставившей гостю «скудную глину желтого обрыва». Антикнязь — да еще с его влюбленностью в скок степных кобылиц — не может не прийти в отчаяние от такой встречи. Его приветствие — это ответ на негостеприимную встречу в жанре горестного упрека с его непременными атрибутами — укоряющим обращением («О, Русь моя!»), напоминанием о забытом долге («Жена моя!»), сигналом огорчения («До боли...») и призывом осознать свою неправоту («Нам ясен долгий путь»). Реализована модель вида: Анна! Жена моя! С какой болью вижу я истинный путь к нашему союзу, от которого ты отказываешься! (В26).

Отметим, что 2.2 неоднозначно (ТО-4). «Нам ясен путь» =1) Я и ты ясно видим предстоящий нам путь (В22); 2) Нам с тобой открыт ясный путь. Вторая модель понимания соответствует современному выражению «Перед нами ясная перспектива» или древнерусским оборотам вида «Ему туда путь чист»=Дорога туда ему свободна. О ясности перспектив и открытости путей говорят другому как раз тогда, когда говорящий эти пути и перспективы видит (ему они «ясны»), а его адресат— нет. Адресата надо еще убедить. Поэтому понимания 1 и 2 несовместимы: 1=нам с тобой ясно, 2≠мне ясно, а тебе неясно, хотя правильный выбор так очевиден («до боли ясен»).

Только 2 могло бы согласоваться с развернутой выше трактовкой 2.1—2 как приветствия-упрека. Но поскольку за этой трактовкой стоит ТО-3, т. е. всего лишь коммуникативно-целевая гипотеза, выбор между пониманиями 1 и 2 должен определяться согласуемостью с какими-либо иными показаниями контекста.

Таким показанием является троекратное повторение подлежащего «наш путь», каждый раз отделенного от сказуемого грамматически немотивированным тире

(2.3—3.1). Теоретически возможно видеть в этих трех фразах смысл «Наш путь состоит в следующем». Это означало бы, что 2.2 надо понимать по схеме 1, но тогда оказалось бы, что говорящий объясняет адресату то, что ему и так «до боли ясно». Таким образом, подобное понимание малоприемлемо даже теоретически (ср. с аналогичной ситуацией для 3.1.3—п. 3.1).

Но троекратный повтор и тире и без таких логических выкладок указывают на другое понимание — противопоставительное. Вот его модель: Как можешь ты думать, что можно продолжать работать неспешно и незаметно? Наша работа — зовет вперед, наша работа — активная, наша работа — в море разных препятствий. В речи подобного строения противопоставляются неправильное и истинное понимание положения вещей. Наша работа=наша истинная работа. Накладывая эту модель на 2.2, получаем: Наш путь=Истинный наш путь=Тот путь, который действительно сужден нам, а не тот, который выбрала ты.

Это толкование предопределяет выбор понимания 2 для 2.2. Согласование смыслов 2.1—3.4 достигнуто. Приветствие-упрек 2.1—2 сменяется естественным своим продолжением — увещеванием: Ты по-прежнему в тихой тоске. Как же не видишь ты сужденного нам пути? Наш с тобой настоящий путь — не в твою ленивую грусть, а к древней татарской воле (2.3—4: В22), не в твою степь тоскливых стогов, а истинно степной (3.1) — в степь летящих кобылиц, не под знаком вековечной мглы и тоски, а в этой твоей мгле и тоске — как в трудной дороге — к цели: к торжеству пламени над мглою (3.1—4.2).

«Мгла», истолкованная здесь как «твоя мгла, Русь», могла бы пониматься и иначе: «окружающая мгла». ТО-4 заставляет выбрать первое понимание. В противном случае 3.3—4 неожиданно показало бы, что Антикнязь почему-то патологически боится ночной темноты. Кроме того, пунктуация 3.3 с ее обособленным определением однозначно свидетельствует, что «мглы» = «этой мглы», а не мглы вообще. Таким образом, за 3.3 стоит утверждение: Эта (твоя) мгла — как тьма ночи и даже как тьма запредельного мира (В17). Можно напомнить в связи с этим, что русские или отбившиеся от татарства герои Ц2—Ц5 — именно «ночные» герои. Антикнязь не возводит на Русь напраслину: «Русь моя,

жизнь моя, вместе ль нам маяться... Вольному сердцу на что твоя тьма!» — так начинается блоковское стихотворение 1910 года, развивающее мотивы застойности русской истории.

Столь же естественным образом, как упрек переходит в прокомментированное увещевание, увещевание сменяется жанром соблазняющих посулов: ночь не помешает достигнуть цели (4.1), тьму разгонят зори костров (4.1—2), и главное, что озарят они — знак желанного союза: промчавшиеся бок о бок сквозь пыль («степной дым») татарскую саблю и русскую хоругвь (4.3—4).

Такая мечта о единении татарской мощи с русской святостью может показаться мечтой, странной для Антикнязя. Между тем за ней стоят исторические факты.

Золотая Орда приняла магометанство совсем незадолго до Куликовской битвы и оставалась в значительной степени языческой. Язычником (а не мусульманином) был, в частности, Мамай, «еллинъ сый верою, идоложрецъ и иконоборецъ», как говорит о нем «Сказание о Мамаевом побоище» (ЛП, с. 25). «Эллинский» и «греческий» для древнерусского книжника — не синонимы, а антонимы: греческий=православный, эллинский=языческий. «Сказание» приравнивает Мамая к Юлиану Отступнику (ЛП, с. 25) — греческому императору, пытавшемуся вернуть Византию к язычеству. Как языческая, а не мусульманская, трактуется в «Сказании» и вся ордынская земля: Боброк слышит, как она «плачется еллинским гласом» (п. 2.1.2). Как языческая («поганая») трактуется Орда и в Ц (2.2.2).

Для язычества же (в отличие от того же мусульманства или христианства с их единобожием) естественно уважение к чужим богам и желание склонить их на свою сторону. Татарское уважение к богу православных было столь велико, что даже во времена порабощенности Руси Ордой политические права московского митрополита были признаны и татарским ханом. Ярлык хана Узбека, данный митрополиту Петру, трактует московского митрополита как владетельного князя, подчиненного непосредственно хану, дает митрополии свободу от татарской дани, подтверждает судебные и административные права митрополита и обязывает его за это лишь немногим: «Да молит бога за нас, и за наши жены, и за наши дети, и за наше племя...» [8]

Молить за татарское племя христианского бога просит тот самый хан Узбек, который ввел в Золотой Орде официальное мусульманство. Что говорить тогда о язычнике Мамае, который не знает, на какого бога ему надеяться, так что, «видевъ свою погыбель, нача призывати богы своа: Перуна и Салавата, и Раклиа и Гурса, и великого своего пособника Махмета. И не бысть ему помощи от них...» (ЛП, с. 45). По рассказу же летописи, разбитый Мамай возглашает уже совершенно однозначно: «Великъ богъ крестьяньский (=христианский.— А. М.) и велика сила его: братьа измаиловичи, безаконнии агаряне (=братья безбожники!—А. М.), побежите неготовыми дорогами (=бегите кто куда. — А. М.)» (ЛП, с. 21).

Посулив радостную картину супружеского единения, Антикнязь завершает свою речь к Руси в жанре апофеоза: вот что должно быть, если ты не останешься глуха к моим призывам: 5.1—6.2. Более того, апофеоз этот утверждает (риторический прием выдавания желаемого за действительное), что искомый идеал уже воплотился. Русь-тоска — лишь призрак самовнушения, зачем-то наведенного на себя истинною Русью — Русью-кобылицей.

5.1.—6.2=Твой покой — не более чем наше с тобою сновидение, иллюзия. На самом деле—вокруг кровь и пыль. Наша жизнь, что бы там ни снилось, всегда была и будет боем. И я вижу, что ты в действительности—летящая кобылица. Ты мчишься, не зная конца своему бегу. Он так стремителен, что попробуй кто-нибудь останови его!

Отметим, что теоретически возможное понимание 5.1 по схеме «Мы всегда в бою и можем лишь мечтать о покое» на фоне развиваемого всем контекстом призыва отказаться от вечного непобедимого покоя (на этом этапе монолога-призыва скинуть с себя ложную маску покоя) явно неприемлемо, хотя именно в таком понимании 5.1 бытует как крылатое выражение.

6.2.2. Если видеть в 6.3—7.4 продолжение того же апофеоза, окажется, что тучи испугались скока кобылицы, который происходит почему-то на фоне заката (а не в зарубежной мгле — 3.3—4.1) и сопровождается рыданиями в душе героя (7.2).

Выбор, следовательно, один. Надо поверить тексту, что 6.3—4 возвращает героя от речи к восприятию окру-

жающего (В25). Он ждет ответа на свой призыв и получает его: Русь молчит, и лишь разгорается над нею кровавый закат. Этот ответ уже поняли тучи: они бегут. Очередь понять ответ и герою. Дальнейшее должно быть осмыслено как реакция на полученный ответ уже неизбежно.

«Закат в крови!» — констатирует герой увиденное. И, поняв, повторяет уже для себя (жанр «горькой усмешки»: Разговор! Какой там разговор! — Ссора!): «Закат в крови!» = Какой там закат! — это «из сердца (=из моего сердца) кровь струится». Все напрасно. Призыв отвергнут. «Плачь, сердце, плачь».

Последнее двустишие — реплика, брошенная на прощание. Жанр реплики — напоминание типа «Разговор не окончен»: 7.3—4=Так помни: покоя нет! Есть скачущая кобылица! Трудно не увидеть здесь между многоточием (7.2) и прощальной фразой вздернутых удил и удара по бокам коня: всадник уносится прочь, бросая финальный возглас уже почти на скаку.

Понимание Ц1 по схеме «запрос — ответ — реакция» дает полное смысловое согласование. Земля в Ц1 запрашивалась Антикнязем и дала ему ответ. В Ц2 к ней же обратится и получит от нее ответ Князь. В Ц3 Тайновидец обратится уже к Той, которая сошла с небес благословить эту землю — Богородице. Наконец, Рыцарь в Ц4 будет призывать Ту, кто в героине Ц3 воплотился — «Мировую душу, страстно тоскующую в объятиях хаоса и пребывающую в тайном союзе с «космическим умом» (РМ, с. 168). Дракон (=пленивший душу Хаос), призрак которого появляется в Ц5, так же связан с плененной им Царевной, как Антикнязь с Русью. В битве земной Князь так же вырвал Русь из рук Антикнязя, как в «битве чудной» Зигфрид вырвет Царевну из лап Дракона.

«Лучшее, что мы можем сделать в честь и память Вл. Соловьева, — это радостно вспомнить, что сущность мира — от века вневременна и внепространственна; что можно родиться второй раз и сбросить с себя цепи и пыль. Пожелаем друг другу, чтобы каждый из нас был верен древнему мифу о Персее и Андромеде; все мы, насколько хватит сил, должны принять участие в освобождении плененной Хаосом Царевны — Мировой и своей души. Наши души — причастны Мировой» (РМ, с. 170—171). Если бы мы искали максимально точной прозаической формулировки смысла Ц как целого, то она — перед нами.

Последняя работа, которая остается комментарию,— прояснить взаимосвязь тех женских образов, которые так явственно проводят героев сквозь смысловые лабиринты блоковского цикла.

7. Земля, небо, жена, невеста

Женские образы космической природы в Ц3—Ц4 достаточно прояснены предшествующим комментарием. Не столь ясны «жена» Антикнязя, «светлая жена» Князя и «княжна-невеста» Тайновидца.

В антитезе духовной (космической) и плотской (брачной) женственности полюса в Ц принадлежат Той Рыцаря и Жене Антикнязя. Рыцарь — слуга своей космической Дамы. Антикнязь — хозяин Руси, недовольный своею холодною женой.

Интерпретация политической зависимости как брачной неволи обычна для русского фольклора и древнерусской книжности. Муж-насильник или жених-насильник, овладевающий землею-невестой (или чужою женою как своею незаконной невестой), — не просто метафора, а живое переживание политических событий средневековым мифологическим сознанием: В27. Антикнязь относительно Руси — именно муж-насильник. Его «Русь моя! Жена моя!» — формула обладания: В28.

Но Русь — жена и для Князя (на этот раз — законная). Именно так должен понимать дело Рыцарь в Ц4. Для него, однако, Дама — уже не земное женское начало. Поэтому как солнце «ясного пути», на который звал Антикнязь, обернулось для Рыцаря «ущербной луной» (в ней проглядывает сквозь световую сущность земной политический символ — эмблема магометанства), так «вечный бой» превратился для него в «дикие страсти» — войну за обладание женою-землей.

Не совсем так понимает дело Тайновидец. Земля, которую Антикнязь считает своей женой, для Тайновидца — мать (3.3.3—4). Но это лишь та земля, из которой он пришел. За Непрядвой начинается другая земля — тоже Русь, но татарская. Он пришел с Князем помочь ему взять в жены эту неведомую и пока чужую землю. И земля эта ждет Князя, готовясь из пленной жены стать его невестой (3.5.3—4).

Самая сложная ситуация — у Князя. Не случайно он колеблется на рубеже, повторяя состояние Германа из Д (п. 2.2.2). Герой Д уходит от своей светлой и законной жены Елены не просто в пространство, а за чужой (и почти демонической) женой — Фаиной. Фаина же не просто ждет этого жениха-избавителя, но и говорит о себе в точности то же, что Тайновидец о невесте-Непрядве: «Жених мой!... Приди, взгляни. Долго ждала тебя, все очи проглядела, вся зарей распылалась, вся песнями изошла, вся синими туманами убралась, как невеста фатой» (Д, с. 144).

Елена и Фаина — имена греческого происхождения, причем первое означает «светлая», второе — «блистающая». Это не случайность: противопоставление света и огня, совмещенное в Ц с русским и татарским началом (как и контраст тишины — громкости, вертикального движения — горизонтального движения, т. е. взлета и скока: п. 6.1.2), в Д развернуто в полную силу. Елена— везде белая, в белых одеждах, в белом домике и т. д. Фаина же — в своей «Песне судьбы», одноименной всей Д — сообщает главное о себе: «Я вся — весна! Я вся — в огне! Не подходи и ты ко мне, Кого люблю и жду!» (Д, с. 129). У Князя, как и у Германа, две жены: светлая (своя, от которой уходят) и огненная (чужая, за которой идут). Огненной женой обладает муж-насильник, претендующий и на Светлую жену (Антикнязь). Но над Светлой женой разражается и вторая беда — от нее уходят, чтобы найти новую невесту в Огненной жене или вообще не вернуться с поля боя (как Герман не возвращается к Елене).

«Долго будет родина больна» (2.4.2) оказывается, таким образом, вообще центральной фразой всего «земного» сюжета Ц. Родина больна тем, что их две — Родина-Елена и Родина-Фаина. Не первый и не последний Князь уходит от Елены, находит (и теряет, как Герман в Д) Фаину и остается в конце концов на каких-то безвестных распутьях: В 29. Д кончается сценой встречи заблудившегося в снегах Германа со случайным путником — Коробейником: «Коробейник. А куда тебе надо? — Герман. А я сам не знаю. — Коробейник. Не знаешь? Чудной человек. Бродячий, значит!.. — Герман. Выведи, прохожий. Потом, куда знаю, сам пойду» (Д, с. 167). Обращение Князя в Ц2 к «светлой жене» (теперь ясно, что этот эпитет — не характеристика, а отличительный признак: благослови, светлая жена, на бой за другую — огненную жену) — не только просьба о молитве, но и прощание (чем бы ни кончилось, не сможет больше «сердце жить покоем»). В образе «светлой жены» Князь прощается не с Родиной, а с ее тихой ипостасью, с Русью-тишиной, как в образе «горючего камня» он ощущает встречу с новой, пока еще чужой землей — Русью-пламенем.

Он заранее уверен, что ни той, ни другой не принесет счастья: «Долго будет родина больна». Фаина в Д, навсегда прощаясь с Германом, говорит: «Трижды целую тебя. Встретиться нам еще не пришла пора... Люби меня. Ищи меня... Родной мой, любимый, желанный! Прощай! Прощай!». Елена же, как и Герман, исчезает в снегах. Ее ждет «белая, снежная дорога. Путь длинный, путь многолетний. А в конце пути — душа Германа». Последние слова плачущей Елены — «Тихий дом сохрани». Ей отвечает благословивший ее монах: «Сохраню, родная. Господь сохранит тебя» (Д, с. 158).

Но Ц по сравнению с Д оптимистичен. Здесь есть Рыцарь, Зигфрид, который знает, в чем состоит настоящий выбор. Это не выбор между Еленой и Фаиной, между ковылем и кобылицей, а выбор между битвой за сегодняшнее обладание и битвой за грядущий день.

* * *

Цель комментария — возвращение к тексту. Если при таком возвращении он дает себя воспринять как связная без натяжек и обладающая нормальной степенью осмысленности речь, значит — понимание осуществилось. Достигнув его, никто не станет спрашивать, в чем заключаются особые глубины поэтического образа — они откроются сами.

Комментатору нет смысла настаивать на верности комментария. Единственное, на чем можно настаивать, — на стремлении развернуть непротиворечивое толкование, связывающее в тексте все от общей структуры до деталей. Настаивать можно и на том, что понимание не должно быть приблизительным. Если читатель не удовлетворен комментарием, ему не следует считать, что он бесполезно потерял время. Он получил в руки методику — и может теперь применить ее для получения других, более удовлетворяющих его результатов. Овладеть такой методикой никогда не бесполезно для любого читателя, ибо в конечном счете понимание текста и самостоятельное комментирование текста — это одно и то же. Пусть осознание этого факта станет главным итогом пройденного нами смыслового пути.

Вспомогательный комментарий

В1 (к с. 5). Сам — друг. — Традиционной народной (и древнерусской) системе счета известна модель вида сам-десят, сам-пят (буквально: сам-десятый, сам-пятый). Сам-десят = девятеро плюс сам я — десятый. Спасающемуся после битвы Мамаю говорят: «И ты пришел на Рускую землю, царь Мамай, со многими силами, з девятью ордами... А ныне ты, поганый, бежишь сам-девят в лукоморье...» (ЛП, с. 13). Сам-друг = сам-другой = сам-второй. Я здесь сам-друг = Я здесь с одним спутником плюс сам-второй. Мы, сам-друг, здесь = Мы, нас двое, здесь.

В2 (к с. 5). За Непрядвой.— Географические реалии мест Куликовской битвы полезно представлять в следующем объеме.

Географическое пространство поделено здесь на три сектора: северо-западный (южная граница — река Непрядва, текущая на восток и впадающая в Дон, восточная — Дон до места слияния с Непрядвой, текущий на юг); северо-восточный (западная граница — Дон, сильно отклоняющийся от места впадения Непрядвы в юго-восточном направлении); юго-западный (северная граница — Непрядва, восточная — Дон от места слияния с Непрядвой).

Непрядва и Дон по границам юго-западного сектора — северный и восточный рубежи Золотой Орды. Непрядва по границе северо-западного сектора — южный рубеж Руси. Восточный сектор — периферийные русские земли. В частности, левобережье Дона в районе слияния с Непрядвой — автономное Рязанское княжество, заключившее накануне Куликовской битвы союз с Ордой.

Куликово поле занимает угловой участок юго-западного сектора — по правым берегам Непрядвы и Дона в месте их слияния. Ордынские войска подходили сюда с юга по пространствам Донского правобережья. Русские войска — с севера по Донскому левобережью, таясь от рязанцев (князь Дмитрий «заповеда коемуждо плъку и въеводамъ: «Да еще кто поидеть по Резанской земли, то же не коснися ни единому власу!» — ЛП, с. 34). Куликовской битве предшествовала переправа русских на место сражения по наведенным через Дон мостам.

Развернутую сводку сведений о Куликовской битве см. в ЛП (с. 255—305: статьи Д. С. Лихачева, В. Т. Пашуто, А. Н. Кирпичникова). С картой сражения легко ознакомиться, обратившись к Большой Советской Энциклопедии.

В3 (к с. 7). Лебеди. — Без учета прототипического толкования блоковские лебеди в качестве вестников враждебного стана (недвусмысленно — в 5.3.3—4) останутся для нас странностью. С его учетом становится ясно, что в Ц просто воспроизводится древнерусская птичья символика боя: «Уже бо те соколи и кречати, белозерскыя ястреби за Дон борзо перелетели и ударилися на многие стада на гусиные и на лебединые. То ти быша ни соколи ни крчеть, то ти наехали руские князи на силу татарскую» (ЛП, с. 10). Аналогичная символика — в «Слове о полку Игореве». «Свои» ассоциируются с хищными птицами, враги — с их обычною добычей.

В4 (к с. 8). За Непрядвой лебеди кричали/За рекой поганая орда. — За рекой≠за Непрядвой, иначе оказывалось бы, что в Ц русское войско идет на врага не из-за Дона, а из-за Непрядвы. Такой исторической «вольности» в Ц нет — хотя бы потому, что в Ц3 герои оказываются «перед Доном» (3.2.1).

По «Сказанию о Мамаевом побоище», переправа через Дон шла за день до битвы (ЛП, с. 38), так что в ночь на 8 сентября русский стан был уже на Куликовом поле. Летописная же повесть сообщает, что переправа шла утром 8 сентября непосредственно перед битвой (ЛП, с. 20). В Ц, как следует хотя бы из Ц3, использована вторая версия: «залечь мосты» ночью (т. е. блокировать их — 3.1.1) противник может только еще не переправившемуся войску. То же и в 2.2.2: за рекой =за Доном.

В таком случае может вызвать недоумение форма «За Непрядвой» (2.1.3) в устах героя, находящегося на берегу Дона. Противоречие возникает, однако, лишь при неучете двузначности подобных оборотов: за Уралом, за Волгой=1) в стороне, противоположной положению

говорящего относительно Урала, Волги; 2) в Зауралье, в Заволжье — безотносительно к положению говорящего.

Непрядва — граница Руси и Орды, так что Занепрядовье для русского — вполне определенное географическое понятие. Ср. общеизвестное название одного из сказаний о Куликовской битве: «Задонщина». Находясь на левом берегу Дона и глядя в сторону Занепрядовья, герой естественным образом употребляет в значении этого — реально отсутствующего в языке — имени оборот «За Непрядвой».

В5 (к с. 11). Не вернуться, не взглянуть назад. — Предложения типа «Не вернуться» (Не проговориться, Не упасть, Не поссориться) могут выступать как минимум в четырех значениях, если исключить заведомо не вписывающийся в контекст Ц2 смысл приказания (Разговаривать с ним спокойно. Не поссориться!): Не поссориться=

1а Теперь уже не поссориться =Теперь уже не случится никакой ссоры:
Друг теперь далеко. Не поссориться (Я боялся ссоры, но она оказалась теперь невозможной).

1б Только бы не поссориться =Только бы не случилось какой-нибудь ссоры:
Нам предстоит тяжелый разговор. Не поссориться! (Я боюсь ссоры — она возможна; но это недопустимо).

2а Теперь уже не удастся поссориться =Теперь уже не пойти на ссору:
Оскорбитель скрыл свое имя. Не поссориться (Я пошел бы на ссору, но это оказалось теперь невозможно).

2б Только бы не позволить себе поссориться =Только бы не пойти на какую-нибудь ссору:
Он явно провоцирует меня. Не поссориться! (Я пошел бы на ссору — она возможна; но это недопустимо)

Теоретически мыслимую альтернативу понимания для глагола «вернуться» — а) с поля боя; б) не вступив в бой, можно не обсуждать: ни с одним из возможных смыслов 2.1.2 значение (а) не согласуется. Смысл же (б) не согласуется с 1а и 1б (отступление не может случиться само собой). Остается две возможности понимания: 2а (Не вернуться=Теперь уже не удастся вернуться — т. е. отступить — даже если бы захотелось. В таком случае перед нами фраза типа «Рубикон перейден») и 2б (Не вернуться=только бы не позволить себе вернуться, т. е. отступить, как бы ни хотелось).

Выбор между 2а и 2б определяется второй частью фразы. Ее осмысление по образцу 2а (Теперь уже не удастся взглянуть назад) невозможно. Подходит лишь образец 2б: Только бы не позволить себе взглянуть назад, т. е. оглянуться!

В таком случае (ТО-3) вся фраза построена по модели вида «Не только не (проговориться, поссориться), но даже и не (намекнуть, задеть)»: 2.1.2=Только бы не отступить, и не только это, но даже и взгляда назад не бросить! Отметим, что логическое ударение падает в этом случае на глагол «взглянуть», а не на последнее слово стиха.

Мысль героя о «взгляде назад» явно навеена двумя хрестоматийно известными «взглядами назад», обернувшимися бедой: современный читатель вспомнит об обернувшемся на выводимую из царства мертвых Эвридику Орфее (взгляд назад — и Эвридика потеряна навсегда); героям цикла более знакома библейская история о гибели Содома и Гоморры: оглянувшаяся на покидаемый гибнущий город Лотова жена превращается в соляной столб. В обоих случаях речь идет о ситуациях, когда взглянуть назад было запрещено, но непреодолимо хотелось.

В6 (к с. 11). На пути — ...камень. За рекой — ...орда. — К 2.1—2 применена здесь ТО-3. Модель сцепления предложений осмыслена по образцу «Гора родила мышь. Соперники согласились на ничью»=Сложилась такая ситуация, когда гора родила мышь. Вот она, эта ситуация: соперники согласились на ничью.

В7 (к с. 11). Горючий белый камень. — Буквальное значение словосочетания (его более архаическая фольклорная форма — Бел-горюч камень) — горящий белый или бело-горящий камень. «Белый» выступает в архаическом значении прозрачный, бесцветный, невидимый [9]. Этот же камень — несокрушимый камень-алатырь, рожденный небесами, в «облачных скалах» [10].

Незримое горение этого камня — следствие не только его небесного происхождения, но и того, что камень вообще — «символ небесного пламени, которое возжег бог-громовник своим каменным молотом и низвел на очаг в виде молнии» [11]. Почитание камней вообще соединилось в горючем белом камне с почитанием рубежей и границ: «...межа была священною чертою; межевые столбы и камни, поставляемые для разграничения имений, служили вещественными, символическими знамениями владычества родовых пенатов...Чтобы захватить чужое поле, надо наперед изменить рубеж, низвергнуть охраняющее его божество. Такое святотатство подвергало виновного жестокой каре...» [12].

Роковая сила незримого межевого камня ощущается не только князем в Ц2, но до какой-то степени и его историческим прототипом. Уже приведя войска на Дон, Дмитрий считает необходимым оправдываться перед богом в самом факте перехода границы. Он ссылается на уже совершившееся оскорбление границ Мамаем: «Господи, не повелелъ еси в чюждь приделъ ступати, аз же, господи, не приступих. Сии же, господи, преступааше, аки змиа къ гнезду» (ЛП, с. 19).

В8 (к с. 12). Помяни ж за раннею обедней... — ТО-4: 2.4.3=1) почти меня поминовением, когда меня не будет в живых, — ибо я погибну; 2) помяни меня в молитве, когда я пойду в бой, — ибо я пойду в бой.

Выбор решается упоминанием в тексте «ранней обедни». Осмысление 1 трудно согласуется с указанием на однократное поминовение (формула православного поминовения — «Вечная память»), а тем более с конкретностью «ранней» (утренней) обедни, как бы в противовес обычной («поздней») обедне или церковной службе вообще.

Другое дело — осмысление 2, предполагающее конкретную праздничную (и потому «раннюю») обедню на Руси грядущим утром, когда в русских церквах начнут славить Богородицу, а войско на Дону двинется навстречу смерти.

В9 (к с. 12). Светлая жена. — От кого именно ждет молитвы о себе князь — это единственный вопрос относительно Ц2, решение которого отложим до выяснения сюжета Ц в целом (п. 7). Отметим лишь, что видеть в «светлой жене» Русь означает соглашаться с тем, что у Руси в лице князя есть «милый друг». Ограничимся пока ссылкой на прототипические источники, неоднократно упоминающие великую княгиню Евдокию и сообщающие, в частности, что незадолго до сражения она «нача много милостыни творити убогим... А сама непрестанно течаше в церковь божию и день и нощь непрестанно моляшеся богу со слезами и пречистой его матере: «Да сподобит меня в радости видить славнаго в человецех, а моего государя, великого князя Дмитрия Ивановича» (ЛП, с. 92).

В10 (к с. 17). С полуночи. — Выбор между двумя теоретически возможными значениями (ТО-4), временным и пространственным (полуночная сторона — север, полуденная — юг), нетруден. С полуночи = с севера.

В11 (к с. 17). Тучей возносилась княжеская рать. — Предложения вида 3.3.1 двузначны (ТО-4): Кошкой подкрадывалась ведьма (мотивы «Майской ночи» Гоголя) = 1) Как кошка, подкрадывалась ведьма; 2) В образе кошки подкрадывалась воплощенная в ней ведьма.

Тогда 3.1 = 1) Как туча, возносилось войско; 2) В образе тучи возносилось воплощенное в ней войско. Выбор решается значением глагола «возноситься» = подниматься ввысь. К войску это значение неприменимо: как бы ни походило оно на тучу, возноситься оно не сможет. Следовательно, верна альтернатива 2: с севера возносится туча, в образе которой воплощается (для Тайновидца) княжеское войско.

В12 (к с. 19). В ночь, когда Мамай залег ... мосты/ И когда, наутро, ...двинулась орда... — В том, что «В ночь» = В эту ночь = Сегодня ночью, можно было бы сомневаться, если бы «наутро» в 8.1 не было обособлено. Ср. образцы:

В ночь после пропажи ребенка никто не спал. И когда наутро он нашелся, родители едва держались на ногах.	В ночь, после пропажи ребенка, никто не спал. И когда, наутро, он нашелся, родители едва держались на ногах.

Первый образец сообщает о событиях не сегодняшней ночи и не сегодняшнего утра, второй — о событиях сегодняшней ночи и утра. Судить о наличии или отсутствии уточняющего обособления в 3.1.1—2 невозможно непосредственно (придаточное предложение!). Остается судить о целом по обособленности формы «наутро».

Эта форма может оказаться обособленной и в контексте первого образца. Все предложение с такой обособленной формой означало бы: И когда он нашелся,— а поскольку вам неизвестно, когда это было, то сообщаю, что это было наутро, — родители едва держались на ногах. Если бы 3.8.1 с его обособлением не указывало бы на обособление уточняющего характера в 3.1.1—2, то именно такой смысл оно только и могло бы выражать. Предполагался бы адресат, которому неизвестно, когда началось сражение. Но со статусом Той такая неосведомленность явно несовместима. Следовательно, обособление в 3.8.1 указывает на уточняющее обособление в 3.1.1—2 (см. второй образец) и на сегодняшний день — смысл такого обособления никак не связан с неосведомленностью адресата: В эту ночь, после пропажи ребенка, никто не спал. И когда, уже наутро (так долго искали!), он нашелся... Отметим, что если для обособленной формы «наутро» понимание утра как сегодняшнего лишь возможно, то для обозначенности сегодняшнего утра в отличие от любого другого обособление этой формы необходимо.

В13 (к с. 20). Разве знала Ты? — Модель «Разве ты знал?» допускает как минимум пять альтернатив осмысления:

1) Как, разве ты знал? = Я был уверен, что ты не знаешь, а ты, оказывается, знал (Ты тоже пришел сюда! Разве ты знал?);

2) Разве что ты знал? — Я был уверен, что ты не знаешь, но ты поколебал мою уверенность (ты почему-то слишком уж точно ответил. Разве ты знал?);

3) Оказывается, ты знал? = Я был уверен, что ты не знаешь, но теперь хочу знать, не ошибся ли я (Как ты смог так точно ответить? Разве ты знал?);

4) Да как же ты знал? = Я вижу, что ты знал, хотя вполне мог бы и не знать (И ты поздравил меня тоже. Разве ты знал?);

5) Разве же ты мог знать? = Я вижу, что ты не знал, хотя, может быть, и следовало знать (Твои слова огорчили его совершенно по другой причине. Разве ты знал?).

Осмысления 1—5, накладываясь на контекст ЦЗ, дают однозначные возможности ответить на вопрос, что именно «знала» или не знала Та. Для 1—4 окажется, что Богородица — вопреки ожиданиям — знала, что Князь и Тайновидец выйдут в поле, и спустилась с небес специально повидаться с ними (теоретически возможное предположение, что речь идет об удивлении героя по поводу осведомленности Богородицы относительно сроков битвы, несовместимо с ее статусом). Тайновидец, считающий, что Богородица явилась очень кстати специально ради него, в контекст ЦЗ явно не вписывается.

Остается осмысление 5, отличающееся от прочих как раз тем, что оно утверждает отсутствие (а не наличие) осведомленности. Богородица не могла явиться по случаю того, что знала о присутствии в поле Князя с Тайновидцем, но она могла явиться именно несмотря на то, что они там присутствуют, — по причине незнания этого. Но, явившись благословлять, она явно благословила и наших героев (3.7.1.—3.8.4.). Тайновидец так и считает. В таком случае единственное, чего могла не знать Та с точки зрения Тайновидца, — это что ее благословение замечено благословляемыми.

Именно это понимание естественным образом согласуется с 3.1.3: Открываю Тебе, что для меня не осталось тайной твое присутствие. Открываю, ибо это то, чего ты не могла знать: «Разве знала ты?»

В14 (к с. 24). Развязаны дикие страсти. — Предваряя разгадку такого отношения к битве (данная в том же разделе, она уточняется еще раз в п. 7), отметим, что параллель переживаниям Всадника обнаруживается в одном из моментов развития героя Д — Германа. В момент, когда он произносит уже цитированный (п. 2.1.2) монолог о Куликовской битве, он ощущает себя приблизительно так же, как Всадник в Ц4, — хотя уподобляет себя не «волку», а воину засадного полка: «Но вот оно — утро! Опять — торжественная музыка солнца, как военные трубы, как далекая битва... а я— здесь, как воин в засаде, не смею биться, не знаю, что делать, не должен, не настал мой час!» (Д, с. 149). И именно как «дикие страсти» описывает Герман в этом своем состоянии сражение: «...рати сшиблись, и весь день дрались, резались, грызлись...» (там же).

В15 (к с. 26). Вздымаются светлые мысли... — Для дальнейшего небезразлично отметить, что противопоставленность горизонтали и вертикали для смысла Ц обладает повышенной значимостью. Движения, ориентированные в горизонтальной плоскости, связаны с негативными, тягостными для героев реальностями. Напротив, вертикальная ориентированность движения связывается с реальностями позитивными, живительными и ободряющими для героев. В Ц2 горизонтальная плоскость — поле. Двигаясь взглядом по этой горизонтали, Князь видит лишь зловеще-загадочную тьму, думает о татарском стане за рекой и о страшном горючем камне. Его главные опасения связаны с горизонтальным движением: «Не вернуться, не взглянуть назад». Всем этим негативным реальностям противопоставлены два вертикальных перемещения: «взыгравший над полками» светлый стяг и приникший (сойдя с коня) к земле Тайновидец.

В Ц3 горизонталь — это то же темное зловещее поле, «залегший в степи» Мамай, рыдания матери «вдали», «чертящие круги» ночные птицы. Вертикаль — «возносящаяся» в знак грядущей победы туча, вспыхивающие «над Русью» зарницы, оберегающие князя, павший на Непрядву туман-фата и нисшедшая с небес Та.

В Ц4 горизонталь торжествует. Ее апофеоз — мечущийся по полю всадник. В небесах движение встречающихся туч тоже горизонтально. Та скрылась за горизонтом, за горизонтом же звучит битва. Вертикаль здесь— только «вздымание» и «падение» светлых мыслей и гривы белого коня.

С горизонтальностью связано в Ц и представление о диком начале (в противовес человеческому). Всадник в Ц4 — как «волк», битва для него — «дикие страсти». В Ц3 есть две тучи: одна — возносящаяся — воплощает собою княжескую рать, другой — ползущей (как туча саранчи) — уподобляется рать татарская. Тут же и горизонтальный полет хищных птиц. «Поганством», т. е. язычеством = дикостью, отмечена противостоящая Князю на горизонтали орда. Если для Ц2—Ц3 горизонтальность и дикость связаны с татарами и происходящими от них бедами, то в Ц4 горизонтальность и дикость— признаки самого героя и вообще всего его окружения— земли, неба и битвы. Вертикальность связана только с мыслями о Той. Противостояние горизонтали и вертикали и связанных с ними диких и человеческих начал понадобятся нам при обращении к Ц5 и особенно Ц1.

В16 (к с. 30). Быть светлым меня научи. — Образ вечной тьмы вводится в Д в описании «всемирной промышленной выставки» с ее огромным залом: «Круглые стекла вверху — как очи дня, но в самом здании — вечная ночь, хотя «Электрический свет... проливается ослепительными потоками» (Д, с. 119). Герман — явный носитель вечной ночи внутри себя. Мотив его «слепоты» (=«темноты») звучит и в его словах, и в его поведении: «Знаю, сколько дела, и не умею начать, не умею различить! И опять — тот же голос шепчет, остерегая, что утро не наступило, что туман не поднялся, что нельзя различить в тумане добро и зло...» (Д, с. 146—147). На реплику собеседника Герман может реагировать так: «Герман (вздрагивает). Я забыл, что вы здесь. — Какой у вас иногда страшный голос! Я не вижу вас — где вы? — Ах, это ветер спрятал вас в бурьяне...» (Д, с. 147).

Совершенно однозначно «ночной» мир героя обнажается в его последней сцене с возлюбленной — загадочной Фаиной: «Герман. Ты смотришь прямо в душу... черными глазами... Фаина. Неправда. Смотри ближе: это ночью черные глаза. А днем рыжие; видишь — рыжие?» (Д, с. 162). В первой редакции Д диагноз ночного зрения героя был подчеркнут: «Фаина... Смотри ближе. Ты видишь меня в первый раз днем. Это ночью у меня темные глаза» (Д, с. 448). Между тем герои по сюжету драмы не один день провели вместе. Речь идет о том, что Герман, по мнению Фаины, впервые «научился быть светлым» — вышел из своего мира вечной ночи. Следует добавить, что сцена происходит отнюдь не астрономическим днем, а поздним вечером, и Фаина, говоря о дне, «наклоняется низко и смотрит на Германа в темноте» (Д, с. 448).

B17 (к с. 31). Темный огонь. — Ад представляется христианскому сознанию одновременно миром тьмы и миром огня. Формула, предсказывающая судьбу грешника, — «Будет извергнут он во тьму внешнюю, где плач и скрежет зубовный», — упоминает о «внешней тьме» терминологически: это именно тьма «вне» — вне мира, где господствует (безотносительно к смене дня и ночи) свет. Другое обозначение той же тьмы — «кромешная», т. е. начинающаяся за «кромами» — за рубежами светового мира (того же корня слова «кромка» и «кроме»). Та же тьма будет упомянута и в Ц1 как тьма «зарубежная» (1.3.3). «Зарубежная» — случайный омоним современного слова. Это эквивалент прилагательных «внешний» и «кромешный», построенный по образцу прилагательного аналогичного содержания: «запредельный».

B18 (к с. 32). Не слышно грома... Не видно молньи... — Без ТО-4 фраза может быть понята в смысле идущей где-то битвы (в понимании некоторых — даже самой Куликовской) и сверкающей где-то молнии, неслышимых и невидимых по каким-то причинам лишь

для героя. Если отвлечься от сюжетного контекста, который сам получен в результате толкования и потому не может быть бесспорным арбитром в выборе альтернативы, то оснований для признания такого осмысления ошибочным два: упоминание вражьего стана с его кричащими лебедями (5.3.3—4) и смысл дважды повторенного слова «грядущий» (эпиграф и 5.1.4).

Первое — указание на подготовку к битве (именно перед битвой должен существовать «стан», а лебеди кричат над ним не во время битвы, а перед ней и в Ц2, и в Ц3, и в прототипических источниках Ц). «Грядущий» — слово неоднозначное: 1) = будущий = тот, что ждет нас впереди; 2) = приближающийся = тот, что идет к нам из будущего. Значение 1 иллюстрируется пушкинским «Что день грядущий мне готовит?.. В глубокой тьме таится он». Значение 2 — брюсовским «Где вы, грядущие гунны, Что тучей нависли над миром? Слышу ваш топот чугунный По еще не открытым Памирам». В Ц5 с контекстом согласуется лишь 2: ночь оказывается не перед следующим за ней днем, а знаком приближения дня (5.3.1—2). «Грядущий день» значит, таким образом, не «следующий день», а «день грядет» (в мир, где пока господствовала ночь). Что «неотразимые беды» разразятся лишь по наступлении дня, косвенно свидетельствует и эпиграф, ибо «неотразимый» значит «тот, который нельзя предотвратить». Приравняв «неотразимые беды» эпиграфа к «битве чудной» героя Ц5, получаем: герой не слышит битвы, потому что ожидает ее с наступлением дня; битва еще только грядет, как грядет день. Отметим, что процитированный брюсовский отрывок вообще на брюсовский манер развивает тему, близкую теме Ц5.

B19 (к с. 34). Эпиграф Ц5. — Стихотворение Вл. Соловьева «Дракон»: (с посвящением: «Зигфриду»):

Из-за кругов небес незримых
Дракон явил свое чело, —
И мглою бед неотразимых
Грядущий день заволокло.

Ужель не смолкнут ликованья
И миру вечному хвала,
Беспечный смех и восклицанья:
«Жизнь хороша, и нет в ней зла!»

Наследник меченосной рати!
Ты верен знамени креста,
Христов огонь в твоем булате,
И речь грозящая свята.

Полно любовью божье лоно,
Оно зовет нас всех равно...
Но перед пастию дракона
Ты понял: крест и меч — одно.

B20 (к с. 42). Тишина — мятежность. — «...динамизм не был и не мог быть идеалом православного средневековья... «Косность» была равновелика церковному идеалу благообразия, благолепия и благочиния. Это слово приобрело пейоративный оттенок не раньше середины XVII в., когда стало цениться новое, то, чего не бывало прежде, когда поколебался идеал созерцательного человека, вытесняемого человеком деятельным.

Но почему все же царь Алексей Михайлович остался в исторической памяти «тишайшим», т. е. смиренным и кротким? Как сложился этот культурный миф? Его истоки — в старинной формуле «тишина и покой», которая символизировала благоустроенное и благоденствующее государство...

...в государственной фразеологии «мятеж» регулярно противопоставляется «тишине». Из этого следует, что «тишайший» монарх — это «обладатель тишины», царь, который умеет поддержать порядок. Слово «тишайший» — титулярный элемент (хотя в официальный титул оно так и не вошло)...

...эпитет «тишайший» время от времени использовался и применительно к Петру» [13].

В21 (к с. 43). Кобылицы. — Вспомним как свидетельство такого отношения к конепоклонничеству хотя бы «Хочешь коня любого?» в устах Кончака в бородинской опере. Кончак соблазняет Игоря в первую очередь конем, и в глазах русского либреттиста это должно выражать кочевническую идеологию его персонажа (конь дороже Родины). Что связь конелюбия с этнической чуждостью жива в народном сознании, может свидетельствовать, например, такое показание современного автора, вспоминающего о временах, близких ко времени создания Ц (эпоха русско-японской войны): «Дед Дементий... нанялся с женой к страшно богатому сибиряку Анплею Степановичу по прозвищу «Кыргиз». Прозвали его так потому, что Анплей Степанович, хотя был и русский человек, землю не пахал, гонял табуны лошадей, общим числом до тысячи голов, сам из седла почти не вылезал, даже до ветру ездил верхом и с оружием» (Самохин Н. Я. Рассказы о прежней жизни // Самохин Н. Я. Толя, Коля, Оля и Володя здесь были. Новосибирск, 1975. С. 16).

В22 (к с. 43). Наш путь — стрелой татарской древней воли Пронзил нам грудь. — В соответствии с двумя указанными синтаксическими неоднозначностями возможны четыре интерпретации фразы:

1 (татарская стрела+стрела воли) = Наш путь пронзил нам грудь татарской стрелой древней воли = Мы ранены на своем пути древней (нашей?) волей, пустившей свою татарскую стрелу (?) в нашу грудь;

2 (татарская стрела+грудь воли) = Наш путь пронзил нам грудь древней воли татарской стрелой = Наша древняя воля ранена в грудь татарской стрелой, пущенной в нее нашим (историческим?) путем;

3 (татарская воля+стрела воли) = Наш путь пронзил нам грудь стрелой древней татарской воли = Мы ранены в грудь стрелой, пущенной нашим путем, — мыслью о древней татарской воле;

4 (татарская воля+грудь воли) = Наш путь пронзил нам грудь древней татарской воли стрелой = Наша древняя татарская воля поражена стрелой, пущенной в ее грудь нашим путем.

Какое из пониманий вписывается в контекст? Понимания 2 и 4 сводят смысл фразы к утверждению, что былая воля погублена. В таком случае «путь» — это уже пройденный (нами) исторический путь: он своей стрелой и погубил волю. Понимания 1 и 3 сводятся к утверждению, что душа («наша грудь») пронзена зовом к древней (былой) воле (волю могут убить, волей же не убивают: построение «грудь пронзена стрелой воли» соответствует моделям вида «В мозгу гвоздем засела тревога за брата», «Сердце ранено стрелою любви» — ср. у Маяковского: «Я ж навек любовью ранен, еле-еле волочусь...»). В таком случае «путь» — это еще предстоящий (нам) путь: он зовет, раня, как стрелой, идеалом воли.

Ту же неоднозначность — пройденный путь или предстоящий путь? — дает его первое упоминание: 2.1—2. Выбор понимания (снова ТО-4) предопределен продолжением речи о пути: 3.3—4.1. Троекратное восклицание «Наш путь — такой-то» резюмируется оценкой: «И даже того-то нечего бояться. Пусть! Все равно домчимся». Бояться уже пройденного пути невозможно. Следовательно, «путь» в 2.1—4.1 — это путь предстоящий. Таким образом, и для 2.3—4 толкования 2 и 4 должны быть отвергнуты (отметим, что и с точки зрения простого словопорядка такие понимания предполагали бы слишком уж раскрепощенное использование автором поэтических вольностей).

Остаются толкования 1 и 3. В случае 1 говорящий называет татарской стрелу, и тогда «наш», «нам» в его речи означает «не татарский» (а наш), «не татарам» (а нам). Татарская стрела тогда — враждебная стрела. Свое стремление к древней нашей воле мы ощущаем как татарскую (враждебную) стрелу в своей душе. Иными словами — хорошо бы, если бы это стремление нам не досаждало. Выбор понимания 1 ведет, таким образом, к абсурду. Остается понимание 3. Отметим, что оно единственное, предполагающее, что в 2.3—4 — нормативный (без поэтических вольностей) словопорядок.

В23 (к с. 45). «Ты» в Ц3 и «ты» в Ц4. — Для романтического рыцаря, каков герой Ц3, его небесная госпожа — объект поклонения; для антиромантического рыцаря, каков герой Ц4, его космическая госпожа — объект забот, тех самых, о которых в статье «Рыцарь—монах» Блок говорит, что они — «одно земное дело: дело освобождения пленной Царевны» (Рм, с. 168). Согласованная с этим противопоставлением противопоставленность прописной и строчной букв в обозначении Той перекликается с эволюцией образа Той в лирике Блока: от «Ты» «Стихов о прекрасной даме», за которой стоит блоковская ипостась соловьевской Предвечной Софии, к «ты» стихов Третьего тома, за которым стоит во многих случаях образ «падшей звезды» — Незнакомки, Валентины — с их «упругими шелками» и «смуглыми плечами», сквозь которые лирический герой Блока прозревает «очарованную даль» и «бездонный провал в вечность» (эта версия сюжета о плененной Царевне детальнее всего развернута в драме «Незнакомка»).

В24 (к с. 45). ...заплакал воевода Боброк, припав ухом к Земле. Эта деталь в С — едва ли не результат вживания Блока в образ Тайновидца — Бедного рыцаря, который у Пушкина отмечен как раз неиссякаемой слезностью: «Проводил он целы ночи Перед ликом Пресвятой, Возведя к ней скорбны очи, Тихо слезы лья рекой». Слезность Тайновидца, никак не выявленная в Ц3, отозвалась неожиданным эхом на блоковском преломлении образа прототипического тайновидца — Боброка.

В25 (к с. 45). Идут, идут испуганные тучи, Закат в крови! Коммуникативная установка этой фразы, предполагаемого «ответа», неоднозначна: ее можно понимать 1) как продолжение монолога о летящей кобылице — тогда и дальнейший текст Ц1 развертывает все ту же картину неудержимого скока; 2) как прекращение монолога: герой умолкает и вглядывается в открывшуюся перед ним картину. В этом случае финал текста — реакция на увиденное. При выборе понимания 2 текст Ц1 открывается сценой созерцания, вызывающего следующую за ним речь; речь сменяется сценой созерцания — ожидания ответа; увиденное вызывает финальную реплику.

Выбор осмысления осуществляется в ходе Основного комментария, показывающего несогласуемость 1 и согласуемость 2 с коммуникативным сюжетом 1.1—6.2. Здесь мы ограничимся двумя косвенными показаниями текста в пользу 2: а) ТО-2 обнаруживает возможность понять 1.6.3—4 как ожидание ответа на прозвучавший призыв на фоне аналогичного двустишия Ц4: 4.7.3—4. В обоих случаях ответ — молчание. В обоих случаях предшествующий монолог — призыв сменяет собою сцену смятенного или разочаровывающего созерцания. Позиция 7.1—4 с ее «Покоя нет!» параллельна позиции Ц5 (относительно Ц4) с его «Не может сердце жить покоем»; б) странный повтор «Закат в крови» в 6.4—7.1 перестает быть странным лишь на фоне ТО-3, допускающей схему вида: «(Герман делает шаг вперед.) Фаина. Смотри, идет, идет...» (Д, с. 140). Перевод ремарки в регистр внутреннего самоотчета от первого лица даст образец: «(себе) Идет... (вслух) Идет!». Накладываем схему на 6.4—7.1: «Герой (всматривается). Закат в крови! (приходит к какому-то выводу)—(Итак) Закат в крови!..».

В26 (к с. 46). О, Русь моя! Жена моя! — Жанр горестного обращения-упрека, представленный в Основном комментарии искусственным образцом (по мотивам «Анны Карениной»), может быть проиллюстрирован— не всегда, однако, в его идеальном составе — реальными примерами вида: «Чуть свет — уж на ногах! и я у ваших ног... В лицо мне посмотрите. Удивлены? и только? вот прием!..» (Чацкий — Софья); «Дочь, Софья Павловна! срамница! Бесстыдница! где! с кем!... Побойся бога, как? чем он тебя прельстил? Сама его безумным называла!» (Фамусов — Софья). Напомним и классическую ильфовскую формулу этого речевого жанра: «И ты, Брут...» (пародийная отсылка к еще более классическому шекспировскому образцу).

В27 (к с. 52). Русь-жена. — «В «Новой повести о преславном Российском царстве» растерзанная Смутой Русь уподобляется невесте, а король Сигизмунд Ваза— жениху-насильнику... Исконная связь... брачного венчания и венчания на царство не раз подчеркнута в «Сказании о Мамаевом побоище». Мамай... ложный жених: не суждено ему обладание ни русской землей, ни татарской, ему сужден брак с сырой землей...

В величаниях новобрачному встречается мотив обладания тремя городами... В свою очередь в причитаниях невесты возникает фигура жениха-насильника, грозного наездника и завоевателя, изоморфная Мамаю из «Сказания» [14].

Осознание царской власти (ордынский владыка, в том числе и Мамай, на языке древнерусского книжника — «царь») как брачного обладания имеет очень древние корни: «...мировоззрение земледельческого периода создало образ земли в виде родящей женщины... Божество местности позднее становится божеством всякого поселения... поэтому в древних языках, в том числе в еврейском и греческом, город — женского рода... И как жених сочетается с невестой, так Иегова сочетается... с Иерусалимской землей, которая отныне называется «замужней» и «любимой богом»... шумная толпа земледельцев справляет праздник жатвы, и в этот день местный бог торжественно вступает в город в качестве жениха и спасителя местной богини... В евангельских эпизодах мы имеем ту же сцену, но совершенно самостоятельно трактованную. Здесь дается жатвенный праздник Кущей; на осле въезжает в город, среди шумной процессии, божество-спаситель и царь... этот въезд трактуется то как приход спасителя к «дочери Сиона», то даже как посещение им ее» [15].

Антикнязь является к земле-жене именно к финалу жатвы («стога» в 1.1.4) и именно как спаситель, обещающий вывести супругу из «тьмы».

В28 (к с. 52). Антикнязь и прототипические завоеватели. — А. М. Панченко обращает внимание на единство традиции литературного преломления героических событий русской истории, связанных с нашествиями завоевателей (Мамая, Карла XII, Наполеона). Литературные отражения этих событий с древнерусских

времен до наших дней повторяют одни и те же мотивы — от образа жениха-насильника до таких деталей, как противостояние тишины и вражеского буйства [16]. Приведем еще одну параллель. Толстовское описание подхода Наполеона к Москве («Война и мир», т. III, ч. 3, гл. XIX—XX) до деталей соответствует сюжету Ц1 (начиная с исторического совпадения — календарного сезона, и далее: раскинувшаяся земля, река, брачные ассоциации, мысль-речь о спасении завоеванной земли от вековой тьмы, ожидание ответа-депутации, молчание Москвы, гарцевание на коне, подчеркнутая театральность поведения завоевателя): «...в десять часов утра 2-го сентября Наполеон стоял между своими войсками на Поклонной горе и смотрел на открывавшееся перед ним зрелище... Москва с Поклонной горы расстилалась просторно с своей рекой, своими садами и церквами и, казалось, жила своей жизнью... Наполеон с Поклонной горы видел трепетание жизни в городе и чувствовал как бы дыхание этого большого и красивого тела... «Москва, святая их Москва! Вот он, наконец, этот знаменитый город! Пора!», — сказал Наполеон и, слезши с лошади, велел разложить перед собою план... «Город, занятый неприятелем, подобен девушке, потерявшей невинность», — думал он... И с этой точки зрения он смотрел на лежавшую перед ним, невиданную еще им восточную красавицу... уверенность обладания волновала и ужасала его... «Одно мое слово, одно движение моей руки, и погибла эта древняя столица царей... Но я пощажу ее. На древних памятниках варварства и деспотизма я напишу великие слова справедливости и милосердия... С высот Кремля, — да, это Кремль, да, — я дам им законы справедливости, я покажу им значение истинной цивилизации, я заставлю поколения бояр с любовью поминать имя своего завоевателя...» Прошло два часа. Наполеон позавтракал и опять стоял на том же месте на Поклонной горе, ожидая депутацию... Москва между тем была пуста... Когда Наполеону с должной осторожностью было объявлено, что Москва пуста, он сердито взглянул на доносившего об этом и, отвернувшись, продолжал ходить молча. «Подать экипаж», — сказал он... Не удалась развязка театрального представления» (при цитировании французский текст заменен русским).

В29 (к с. 53). Две Руси: Блок и Л. Толстой. — Усиливая показанную в В28 параллель, отметим, что Толстой, помимо прямого описания московского пожара, вводит в «Войне и мире» специальную главу, где описывается видимое издалека зарево этого пожара (т. III, ч. 3, гл. XXX). Это, как и в Ц4, — «широкий и тихий пожар»: «Зарево расходилось и колыхалось дальше и дальше... Послышались вздохи, слова молитвы и всхлипывание старого графского камердинера». Осеняется свечением, молится и плачет оставленная Князем «Войны и мира» — Кутузовым — тихая Русь. Склонность к слезам у самого Кутузова подчеркнута Толстым неоднократно (та же черта — у Дмитрия Донского, по древнерусским источникам, что находит свое продолжение у Блока: п. 6.1.2 и В24). Характерно, что смерть Кутузова при победоносном марше русских войск в Европу трактуется Толстым как не случайная: «...он один, этот придворный человек, в Вильне, тем заслуживая немилость государя, говорит, что дальнейшая война за границей вредна и бесполезна» (т. IV, ч. 4, гл. V). «Кутузов не понимал того, что значило Европа, равновесие, Наполеон. Он не мог понимать этого... Представителю народной войны ничего не оставалось, кроме смерти. И он умер» (т. IV, ч. 4, гл. XI). За «горючим камнем» этому Князю делать нечего. Но это не помешает Руси-Фаине в ее парижском триумфе. Толстовский же Александр I, совсем как Герман в Д, овладев своей Фаиной — покорив Европу, — «вдруг признает ничтожность этой мнимой власти, отворачивается от нее, передает ее в руки презираемых им и презренных людей и говорит только:

— «Не нам, не нам, а имени твоему!» Я человек тоже, как и вы; оставьте меня жить, как человека, и думать о своей душе и боге» (Эпилог, ч. 1, гл. IV). Сравним это с финальной сценой Д (п. 7) и повторим блоковскую формулу: «Долго будет родина больна»...

Примечания

1. Евреинова Н. Н. Цикл стихов А. Блока «На поле Куликовом» и его источники в древнерусской литературе//Русская советская поэзия и стихотворение. М., 1969; Паперный В. М. К вопросу о поэтическом механизме исторического мышления Блока (Цикл «На поле Куликовом»)//Русская филология. Тарту, 1977. Вып. 5; Левинтон Г. А., Смирнов И. П. «На поле Куликовом» Блока и памятники Куликовского цикла//Куликовская битва и подъем национального самосознания. Л., 1979; Кусков В. В. Осмысление поэтических образов древнерусской литературы в цикле стихотворений А. Блока «На поле Куликовом»//Вестник МГУ. Сер. 9. Филология. 1980. № 6.

2. Дридзе Т. М. Язык и социальная психология. М., 1980; Сорокин Ю. А. Психолингвистические аспекты изучения текста. М., 1985.

3. Герменевтика — философское учение о законах понимания и филологическое искусство толкования текста. См.: Гусев С. С., Тульчинский Г. Л. Проблема понимания в философии. М., 1985.

Лотман Ю. М. Роман А. С. Пушкина «Евгений Онегин»: Комментарий. Л., 1980. С. 5—6.

5. Текст С и других статей Блока цит. по: Блок А. Сочинения: В 2-х т. М., 1955. Т. 2; текст Д цит. по: Блок А. Собр. соч.: В 8-ми т. М.; Л., 1961. Т. 4. При цитировании указываются страницы названных изданий.

6. Эти древнерусские памятники доступны в оригинале и в переводе в современном издании: Сказания и повести о Куликовской битве. Л., 1982. Использование всех помещенных здесь материалов отмечается далее отсылкой к изданию в целом (ЛП, т. е. «Литературные памятники», — серия, которой принадлежит названное издание) с указанием страниц. При цитировании древнерусских текстов буква «ять» заменена на «е».

7. Колесов В. В. История русского языка в рассказах. 2-е изд. М., 1982. С. 28, 31.

8. Афанасьев А. Н. Древо жизни. М., 1982. С. 107.

9. Там же, с. 184.

10. Там же, с. 184. О почитании камней вообще. — С. 230—231.

11. Паперный В. М. Указ. соч., с. 64.

12. Панченко А. М. Русская культура в канун Петровских реформ. Л., 1984. С. 6—8.

13. Никольский Н. М. История русской церкви. 3-е изд. М., 1985. С. 64.

14. Панченко А. М. Цит. соч., с. 199—200.

15. Фрейденберг О. М. Миф и литература древности. М., 1978. С. 494—497.

16. Панченко А. М. Цит. соч., с. 201—203.

М. А. Шубин

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Эти лекции дважды прочитаны автором в Красноярской краевой летней школе по естественным наукам школьникам, окончившим 9-й класс. При этом, как обычно, лекции сопровождались семинарскими занятиями, на которых обсуждались задачи, также приведенные здесь после соответствующих параграфов (более трудные и не обязательные из них отмечены звездочками).

Автор исходил из того, что математический анализ, исторически появившийся как инструмент естествознания, должен с самого начала излагаться в связи с его приложениями в физике и других естественных науках. Для школьников, впервые знакомящихся с предметом, это более важно, чем строгость изложения, соблюдение которой сильно удлиняет путь к приложениям. В этом смысле образцом служит книга Я. Б. Зельдовича «Высшая математика для начинающих» (М., 1960)*. Однако эта книга все-таки требует значительного времени для изучения. Чтобы еще больше сократить путь к приложениям, автор использовал знания по математическому анализу, которые школьники должны иметь после окончания 9-го класса.

Отметим, что задачи с физическим содержанием, которые являются здесь основными, имеют свою специфику. При их решении желательно соблюдать следующую последовательность действий:

1-й этап — составление дифференциального уравнения с буквенными данными;

2-й этап — решение соответствующего дифференциального уравнения и получение буквенного ответа, анализ этого ответа;

* См. также последующие издания этой книги или книгу Я. Б. Зельдовича и И. М. Яглома «Высшая математика для начинающих физиков и техников» (М., 1982).

3-й этап — получение численного ответа (подстановка чисел в формулы, полученные на втором этапе).

Первый этап состоит в нахождении математического описания явления на языке дифференциальных уравнений и не относится к математике. На втором этапе применяют математический анализ для решения полученных дифференциальных уравнений. Использование на первых двух этапах числовых данных задачи громоздко и вредно для последующего анализа. Если буквенных обозначений всех или некоторых величин в задаче нет, следует их ввести. Анализ полученного в буквах ответа должен убедить вас в правильности составления уравнения (нужно анализировать физические следствия полученных формул и их предельные случаи, чтобы понять, соответствует ли ответ здравому смыслу и физической реальности). На третьем этапе подставляют числа в формулы, не забывая о единицах. Целесообразно подставлять числа прямо с единицами, данными в задаче, и лишь потом преобразовывать единицы (преждевременный перевод в единую систему может оказаться неэкономным, т. к. некоторые единицы измерения могут сократиться). Точность вычислений должна соответствовать точности данных задачи. Примеры решений по этой схеме даны в тексте лекций.

Таким образом, предмет, о котором идет речь, — это простейшие дифференциальные уравнения, возникающие в прикладных задачах. Быть может, читателям небезынтересно узнать, что основное открытие И. Ньютона, которое он счел нужным засекретить и опубликовал в виде анаграммы, состоит в следующем: «Законы природы выражаются дифференциальными уравнениями»*. Яркий пример применения дифференциальных уравнений — открытие Нептуна, сделанное в 1846 г. Дж. Адамсом и У. Леверье на основе независимо проведенных расчетов с использованием наблюдавшейся аномалии в движении Урана — последней известной тогда планеты. Мне хотелось, чтобы школьник, активно интересующийся математикой, обратил внимание на важность дифференциальных уравнений в самом начале своего серьезного знакомства с математикой.

* Цит. по: Арнольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., 1984.

1. Производная как мгновенная скорость. Правила дифференцирования

Пусть какое-то тело (материальная точка) движется вдоль прямой (например, вертикальной). Обозначим через $z(t)$ координату этого тела вдоль данной прямой в момент времени t. Начало координат на прямой можно выбрать произвольно. Средняя скорость движения на отрезке времени $[t, t+\Delta t]$

$$v_{cp}\,(t, t+\Delta t) = \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta z}{\Delta t}.$$

Здесь Δt — любое ненулевое действительное число. Устремляя Δt к 0 при фиксированном t, получим мгновенную скорость в момент времени t, которая в математике называется производной функции z по t и обозначается $z'(t)$ или просто z', если момент t произволен или ясно, о каком t идет речь. Таким образом, производная

$$z' = z'(t) = \frac{dz}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}$$

представляет собой мгновенную скорость движения в момент времени t (отношение пути, пройденного за бесконечно малый промежуток времени, к величине этого промежутка с учетом знаков). Если $z'(t)<0$, то в момент времени t тело двигалось в сторону уменьшения координаты z.

В дальнейшем при употреблении производной какой-либо функции $z(t)$ подразумевается, что эта производная существует (для функций, встречающихся в физике, выполняется, как правило, всюду, за исключением, быть может, отдельных значений t). Для конкретных функций существование производных обычно легко установить из правил дифференцирования, но мы не будем специально следить за этим, чтобы не удлинять изложение.

Пример 1. Равномерное движение:

$$z(t) = z_0 + vt.$$

Тогда $z'(t) = v$ — постоянная величина.

Пример 2. Равноускоренное движение:

$$z = z_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

здесь v_0 — начальная скорость, a — ускорение. В этом случае $z'(t) = v_0 + at$ по известным правилам дифференцирования. Напомним, что если даны две функции $f(t)$, $g(t)$ и постоянная a, то $(f+g)' = f' + g'$, $(af)' = af'$,

$$(fg)' = f'g + g'f,\ \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$$

(последняя формула верна в случае, когда $g(t)\neq 0$ в рассматриваемой точке t). Из предпоследней формулы следует, что $(t^2)' = 2t$.

При любом целом n легко проверить (например, индукцией по n), что $(t^n)' = nt^{n-1}$. Можно доказать, что при $t>0$ эта формула верна и для нецелых n (об этом еще будет идти речь ниже).

Укажем геометрический смысл производной: если нарисовать график функции $z = z(t)$, то $z'(t) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол наклона касательной, проведенной к графику в точке $(t, z(t))$, к оси t (рис. 1).

Правило дифференцирования сложной функции: если даны две функции $F(z)$ и $z(t)$, то для функции $g(t) = F(z(t))$ производную можно найти по формуле

$$g'(t) = [F(z(t))]' = F'(z(t))\,z'(t),$$

вытекающей из того, что

$$g'(t) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta g}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta F(z(t))}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left[\frac{\Delta F}{\Delta z}\,\frac{\Delta z}{\Delta t}\right] = F'(z(t))\,z'(t)$$

(здесь использовалось, что если $\Delta t\to 0$, то и $\Delta z\to 0$).

Правило дифференцирования обратной функции. Пусть функция $z = f(t)$ строго монотонна на отрезке $[t_1, t_2]$ и имеет производную в каждой точке этого отрезка. Строгая монотонность означает, что функция f

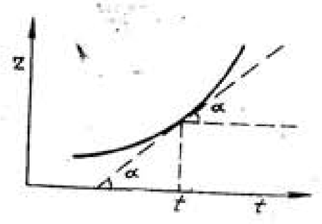

Рис. 1

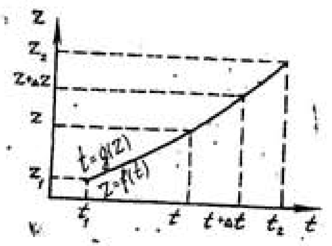

Рис. 2

либо возрастающая (если $t'<t''$, то $f(t')<f(t'')$), либо убывающая (если $t'<t''$, то $f(t')>f(t'')$). Будем для определенности считать функцию f возрастающей. Тогда множество значений функции f на отрезке $[t_1, t_2]$ представляет собой отрезок $[z_1, z_2]$, где $z_1=f(t_1)$, $z_2=f(t_2)$ (рис. 2). При этом каждому значению $z\in[z_1, z_2]$ отвечает ровно одно значение t, такое, что $z=f(t)$. Обозначим это значение $g(z)$. Тогда $t=g(z)$ называется обратной функцией к функции f. Из определения ясно, что обратная функция $t=g(z)$ связана с «прямой» функцией $z=f(t)$ соотношениями $f(g(z))=z$, $g(f(t))=t$. Вместо отрезка $[t_1, t_2]$ можно рассматривать интервалы $[t_1, t_2[$, $]t_1, t_2]$, $]t_1, t_2[$, полуинтервалы $[t_1, +\infty[$, $]-\infty, t_1]$ и т. п.

Дадим приращение Δt аргументу t и проследим за соответствующим приращением Δz функции f, т. е. возьмем $\Delta z=f(f+\Delta t)-f(t)$. Тогда, наоборот, для обратной функции g ее приращение, соответствующее приращению Δz ее аргумента, равно Δt (см. рис. 2). При $\Delta t\to 0$ будет $\Delta z\to 0$, откуда (если $f'(t)\neq 0$)

$$g = g'(z) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)} = \frac{1}{f'} = \frac{1}{f'(t)}.$$

Таким образом, мы получили правило *дифференцирования обратной функции:*

$$g'(z) = \frac{1}{f'(t)}, \text{ где } z = f(t) \text{ или } t = g(z).$$

Укажем еще одно доказательство этого правила. Дифференцируя тождество $f(g(z))=z$ по правилу дифференцирования сложной функции, получаем $f'(g(z))g'(z)=1$, откуда $g'(z)=\frac{1}{f'(g(z))}$, что и требовалось.

Пример. Если $z=f(t)=t^2$, то $t=g(z)=\sqrt{z}$ (считаем, что рассматриваются значения $t\geqslant 0$, на $[0, \infty)$ функция строго монотонна). Имеем:

$$g'(z) = \frac{1}{f'(t)} = \frac{1}{2t} = \frac{1}{2g(z)} = \frac{1}{\sqrt{z}}.$$

Итак,

$$(\sqrt{z})' = \frac{1}{2\sqrt{z}}.$$

Эта формула — частный случай более общей формулы $(t^n)'=nt^{n-1}$ (или $(z^n)'=nz^{n-1}$), которая верна при $t>0$ (при $z>0$) для произвольного вещественного значения n.

Для доказательства нужно сначала рассмотреть случай $n=\frac{1}{q}$, где $q>0$, q — целое. Тогда формула выводится так же, как в случае $n=1/2$. Из правила $(fg)'=f'g+fg'$ следует, что если формула верна для $n=n_1$ и $n=n_2$, то она верна для $n=n_1+n_2$. Теперь мы получаем искомую формулу для всех $n=\frac{p}{q}$, где p, q — целые, p, $q>0$. По непрерывности она верна при всех $n>0$. При $n=0$ формула очевидна. Если $n<0$, то нужно записать $t^n=\frac{1}{t^{-n}}$ и воспользоваться формулой дифференцирования дроби. Например, $\left(\frac{1}{t^2}\right)' = \frac{-2}{t^3}$.

Задачи

1.1. Поезд прошел некоторый путь, причем первую половину он шел со скоростью 40 км/ч, а вторую со скоростью 60 км/ч. Какова была средняя скорость поезда?

1.2. По графику квадратного трехчлена $y=ax^2+bx+c$ (рис. 3) определить знаки его коэффициентов a, b, c.

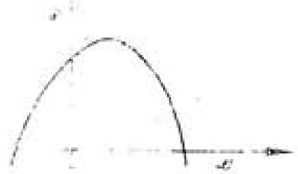

Рис. 3

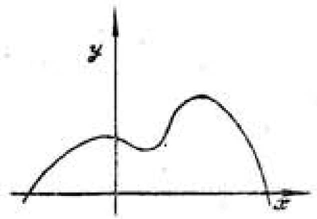

Рис. 4

1.3. По графику функции $y=f(x)$ (рис. 4) нарисовать график ее производной $f'(x)$.

1.4. Написать уравнение прямой, касательной к графику функции $y=3x-x^2$ в точке этого графика с абсциссой $x_0=2$.

1.5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3+6x^2+9x+1$ на отрезке $[-3,1]$.

1.6. Найти производную функции:

а) $y=(x^2+1)^{1986}$; б) $y=\sin x^2$; в) $y=\sqrt{x^2+1}$;

г) $y=e^{x^2}$; д) $y=e^{ex}$; е) $y=\sin\cos x$; ж) $y=\sqrt[10]{x^5+1}$.

1.7. В равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами длины 1 вписать прямоугольник наибольшей площади со стороной, лежащей на гипотенузе этого треугольника. Какова эта наибольшая площадь?

1.8. Написать формулы, задающие координаты точки, равномерно движущейся по окружности, как функции времени. Найти производные этих функций. Что характеризует эти производные? Как увидеть из полученных формул, что скорость движения направлена по касательной к окружности?

1.9. Две среды разделены плоской границей раздела. Луч света, идущий из точки, лежащей по одну сторону границы раздела, в точку, лежащую по другую сторону, избирает путь, требующий наименьшего времени. Что это за путь, если скорость движения света в указанных средах равна v_1 и v_2 соответственно?

2. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция — это функция $z(t)=a^t$, где $a>0$, a — постоянная величина. Вместо t можно обозначить аргумент любой другой буквой, например, x. Будем писать a^x, что чаще встречается в учебниках. При $a>1$ функция a^x строго монотонно возрастает, а при $a<1$ строго монотонно убывает (рис. 5). Найдем производную функции a^x. Имеем:

$$(a^x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} a^x\cdot\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} =$$

$$= a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = ba^x,$$

где $b=(a^x)'|_{x=0}$, т. е. b — значение искомой производной при $x=0$. Оказывается, что если взять $a=e=2{,}718281828459045\ldots$, то получим $b=1$, и производная имеет наиболее простой вид: $(e^x)'=e^x$.

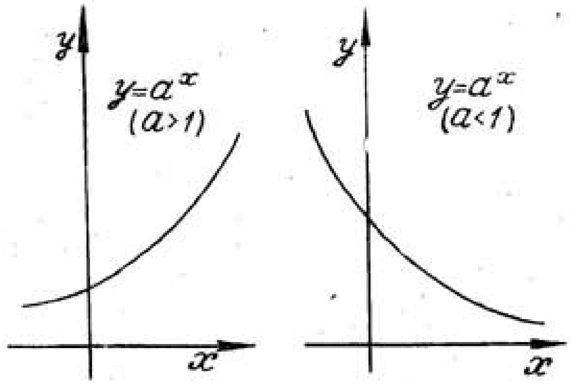

Рис. 5

Число e, для которого верна эта формула, находим из условия

$$(e^x)'\Big|_{x=0} = 0, \text{ т. е. } \lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x} = 1.$$

Полагая $\Delta x=\frac{1}{n}$, где $n\gg 1$ (т. е. n очень велико), получим $e^{\Delta x}\cong 1+\Delta x$, причем точность этой приближенной формулы тем больше, чем меньше Δx (или чем больше n). При целом находим $e=(e^{\frac{1}{n}})^n\cong\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, или, точнее, $e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Логарифмическая функция $y=\log_a x$ определяется при $a>0$, $a\neq 1$, и ее область определения — все положительные x. Эта функция обратная к a^x, т. е. условие $y=a^x$ равносильно условию $x=\log_a y$. Множество значений функции $\log_a y$ — все вещественные числа. Графики функций $y=\log_a x$ на рис. 6. Наиболее проста в обращении логарифмическая функция $\ln x=\log_e x$, т. е. логарифмическая функция с основанием $a=e$.

Найдем производную функции $y=\ln x$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\ln x)' = \frac{1}{(e^y)'}\Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^y}\Big|_{y=\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Найдем производную показательной функции a^x. Имеем:

$$a^x=(e^{\ln a})^x=e^{x\ln a},$$

откуда по правилу дифференцирования сложной функции

$$(a^x)'=\ln a\cdot e^{x\ln a}=\ln a\cdot a^x.$$

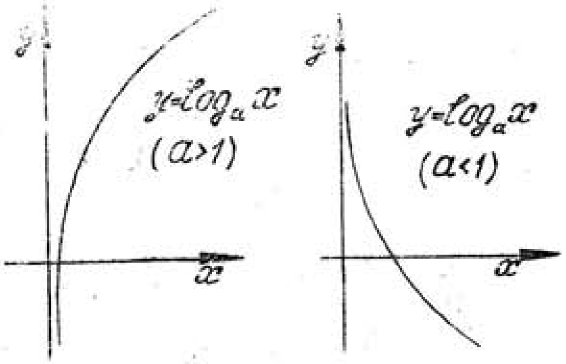

Рис. 6

Мы нашли постоянную b, которая ранее не была определена, и оказалось, что $b=\ln a$.

Отметим, что $\log_{10}e\approx 0{,}4343$ и $\ln 10=\frac{1}{\log_{10} e}\approx 2{,}3$, т. е. $(10^x)'\approx 2{,}3\cdot 10^x$.

Найдем производную функции $y=\log_a x$. По правилу дифференцирования обратной функции,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{\ln a\cdot a^y}\Big|_{y=\log_a x} = \frac{1}{\ln a\cdot a^{\log_a x}} = \frac{1}{\ln a\cdot x}.$$

В частности, $(\log_{10}x)'=\frac{1}{(\ln 10)\,x}=\log_{10}e\cdot\frac{1}{x}\approx 0{,}4343\cdot\frac{1}{x}$.

Формулу для $(\log_a x)'$ можно также вывести из соотношения $\log_a x=\frac{\ln x}{\ln a}=\frac{\log_b x}{\log_b a}$, верного при любом $b>0$, $b\neq 1$ (проверьте его самостоятельно!).

Задачи

2.1. Пользуясь только определением логарифмической функции, вычислить:
а) $\log_2 256$; б) $\log_4(2^{1986})$; в) $\log_3(27^{15})$;
г) $\log_{27}(3^{99})$; д) $\ln(e^{1986})$; е) $2^{\log_2 5}$;
ж) $9^{\log_3 10}$; з) $e^{\ln 1986}$; и) $a^{\log_a x}$.

2.2. Доказать формулу $\log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$, где $x>0$, $a>0$, $a\neq 1$.

2.3. Доказать, что $\log_a x=\frac{1}{\log_x a}$ при $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$, $x\neq 1$.

2.4. Используя приближенные значения $\ln_{10}\cong 2{,}3$, $\log_{10}e\cong 0{,}4343$, $\log_{10}2\cong 0{,}30$, найти приближенные значения (с точностью 10%): а) $\ln 100$; б) $\ln 0{,}1$; в) $\log_{10}40$; г) $\log_{10}5$; д) $\log_{10}32$; е) $\ln 2$; ж) $\ln 25$; з) $\ln 20$; и) $\ln 0{,}5$; к) $\ln 0{,}01$ л) *e^{10}.

2.5.* Что больше: а) $\log_2 3$ или $\log_3 4$; б) $\log_5 7$ или $\log_7 8$?

2.6.* Придумать способ приближенного вычисления $\log_a x$ для данных x и a с любой наперед заданной точностью. Вычислить с помощью этого способа $\log_2 3$ с точностью до 0,1.

2.7.* Вычислить приближенно $\log_{10}2$ с точностью до 0,1.

2.8.* Вычислить приближенно $\log_{10}e$ с точностью до 0,1.

2.9. Найти производные функций а) $y=\ln x^2$; б) $y=\frac{1}{x^2+1}$; в) $y=\ln\ln x$; г) $y=\log_2 x$; д) $y=2^x$; е) $y=\log_{10}(x^3+1)$.

2.10* Доказать, что последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ возрастает с ростом n, а последовательность $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ убывает с ростом n. Вывести отсюда, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

2.11.* Доказать, что $2<e<3$.

3. Восстановление пути по скорости. Интеграл

Предположим, что нам задана скорость движения по прямой во все моменты, например, запись показаний спидометра автомобиля, и мы хотим восстановить путь, пройденный в каждый момент времени, точнее, координату движущейся точки в любой момент времени. Это значит, что производная $z'(t)$ известна во все моменты $t \in [t_1, t_2]$ и требуется найти $z(t)$. Обозначим $z'(t) = v(t)$. Функция $z(t)$ называется неопределенным интегралом функции $v(t)$, или первообразной для функции $v(t)$.

Насколько однозначно определена функция $z(t)$? Ясно, что если заменить $z(t)$ на $z(t)+C$, где C — постоянная, то $v(t) = z'(t)$ не изменится. Смысл этого состоит в том, что можно начать движение с любой точки. Если задать точку начала движения $z(t_1) = z_0$, то $z(t)$ определяется однозначно. Это можно увидеть еще таким образом: если $z_1(t)$, $z_2(t)$ — две такие функции, что $z_1'(t) = v(t)$, $z_2'(t) = v(t)$, то, обозначив $z_3(t) = z_1(t) - z_2(t)$, получим $z_3'(t) = 0$, т. е. функция $z_3(t)$ задает движение с нулевой скоростью, откуда соответствующая точка стоит на месте, т. е. $z_3(t) = C$, $z_1(t) = z_2(t) + C$.

Определенный интеграл. Пусть задана скорость движения $v(t)$ и $a, b \in [t_1, t_2]$, где $[t_1, t_2]$ — отрезок времени, на котором рассматривается движение. Перемещение точки за время от $t=a$ до $t=b$ называется интегралом функции $v(t)$ по отрезку $[a, b]$ (или определенным интегралом) и обозначается

$$\int_a^b v(t)\,dt$$

(смысл этого обозначения мы выясним ниже). Если $z(t)$ — первообразная для функции $v(t)$, то ясно, что данное перемещение равно $z(b) - z(a)$, откуда

$$\int_a^b v(t)\,dt = z(b) - z(a) = z(t)\Big|_a^b$$

(последнее выражение является просто удобной сокращенной записью для $z(b) - z(a)$).

Эта формула называется формулой Ньютона — Лейбница. Можно записать наоборот функцию $z(t)$ — через определенный интеграл. Для этого под знаком интеграла обозначим переменную t другой буквой τ (это не играет роли, т. к. результат зависит только от b и a, но не от t). Вообще переменная, по которой происходит интегрирование (t в интеграле, написанном выше), называется переменной интегрирования, и ее можно обозначать любой буквой, от которой не зависят пределы интегрирования a и b. Поэтому формула Ньютона—Лейбница может быть записана в виде

$$\int_a^b v(\tau)\,d\tau = z(b) - z(a).$$

Примем $b=t$ и получим

$$\int_a^t v(\tau)\,d\tau = z(t) - z(a)$$

или

$$z(t) = z(a) + \int_a^t v(\tau)\,d\tau.$$

Эта формула дает запись первообразной функции в виде *определенного интеграла с переменным верхним пределом.* Из нее следует, что

$$\left(\int_a^t v(\tau)\,d\tau\right)' = z'(t) = v(t),$$

т. е. *производная от интеграла по переменному верхнему пределу равна значению подынтегральной функции на этом пределе).*

Примеры нахождения первообразных и интегралов. Операция нахождения первообразных (или неопределенных интегралов) обратна нахождению производной. Обозначим неопределенный интеграл функции $v(t)$ через $\int v(t)\,dt$. Если $z(t)$ — какая-то первообразная для $v(t)$, то $\int v(t)\,dt = z(t) + C$, где C — произвольная постоянная. Зная таблицу производных, можно найти некоторые первообразные и интегралы. Например:

$$(t^n)' = nt^{n-1} \to \int t^{n-1}\,dt = \frac{1}{n} t^n + C \quad (\text{при } n \neq 0),$$

или $\int t^n\,dt = \dfrac{1}{n+1} t^{n+1} + C$ (при $n \neq -1$),

$$(\ln t)' = \frac{1}{t} \; (\text{при } t > 0) \to \int \frac{1}{t}\,dt = \ln t + C \quad (\text{при } t > 0),$$

$$(e^t)'=e^t \to \int e^t dt = e^t + C,$$
$$(\sin t)' = \cos t \to \int \cos t\, dt = \sin t + C,$$
$$(\cos t)' = -\sin t \to \int \sin t\, dt = -\cos t + C.$$

Если $v(t) = v_1(t) \pm v_2(t)$, то первообразная $z(t)$ может быть найдена по формуле $z(t) = z_1(t) \pm z_2(t)$, где $z_1(t)$, $z_2(t)$ — первообразные для $v_1(t)$, $v_2(t)$.

Пример. Пусть $v(t) = v_0 + at$ равноускоренное движение, тогда

$$z(t) = \int (v_0 + at)\, dt = \int v_0\, dt + \int at\, dt = v_0 t + \frac{at^2}{2} + C = z_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2},$$

где $z_0 = z(0)$ — значение координаты z в момент времени 0.

Задачи

3.1. Скорость точки, движущейся по прямой, меняется по закону: а) $v(t) = t^3$; б) $v(t) = t^{-2}$; в) $v(t) = t^{-1}$. Какой путь будет пройден при $1 \leqslant t \leqslant 2$?

3.2. Вычислить: а) $\int\limits_0^{\pi/2} \cos t\, dt$; б) $\int\limits_2^8 t^4 dt$; в) $\int\limits_3^{10} \frac{1}{t}\, dt$;

г) $\int\limits_5^7 x^3 dx$; д) $\int\limits_0^1 \sqrt{x}\, dx$; е) $\int\limits_1^2 \sqrt[4]{x}\, dx$; ж) $\int\limits_1^2 e^x\, dx$;

з) $\int\limits_2^4 2^x dx$.

3.3. Вычислить: а) $\int x^5 dx$; б) $\int \sin 2x\, dx$;
в) $\int \sqrt{3x}\, dx$; г) $\int e^{4x} dx$.

3.4. Доказать, что если $f(x) = ax^2 + bx + C$, то

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} f(t)\, dt = \frac{1}{6}\left[f(x_1) + 4f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f(x_2)\right](x_2 - x_1).$$

4. Геометрический смысл интеграла и его применение для вычисления площадей и объемов

Нарисуем график скорости $v(t)$ и попробуем понять, как по нему восстановить перемещение $z(t)$. Пусть сначала $v(t) = v_0$ — постоянная. Тогда за время

от t_1 до t_2 проходится путь $z(t_2) - z(t_1) = v_0(t_2 - t_1)$. Этот путь равен площади под графиком v, лежащей между вертикальными прямыми $t = t_1$ и $t = t_2$ (рис. 7), т. к. получается прямоугольник с высотой v_0 и основанием

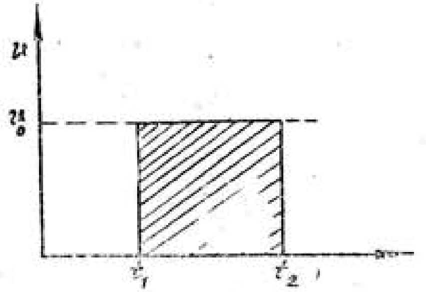

Рис. 7

$(t_2 - t_1)$. Оказывается, то же самое верно и в общем случае, т. е. *перемещение* $z(b) - z(a) = \int\limits_a^b v(t)\, dt$ *равно площади под графиком* $v(t)$ *между вертикальными прямыми* $t = a$ и $t = b$ (рис. 8). По этой причине возникло обозначение интеграла через $\int$ (это вытянутая буква S). Для доказательства нужно разбить отрезок $[a, b]$ на ма-

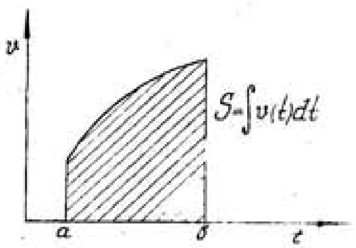

Рис. 8

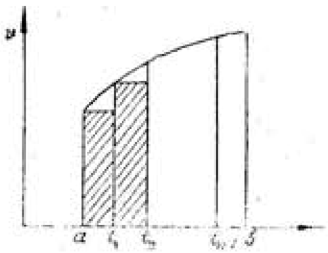

Рис. 9

ленькие части точками $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$: $a < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < b$. Примем для удобства $t_0 = a$ и $t_n = b$. Тогда площадь S, о которой идет речь выше, с любой точностью можно заменить на сумму площадей прямоугольников с нижними основаниями $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, ..., $[t_{n-1}, t_n]$ и с высотами $v(t_0)$, $v(t_1)$, ..., $v(t_{n-1})$ (рис. 9), т. е. получаем

$$S \cong v(t_0)(t_1-t_0)+v(t_1)(t_2-t_1)+\ldots+$$

$$+\,v(t_{n-1})(t_n-t_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)(t_{k+1}-t_k) = \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\Delta t_k$$

(это сокращенное обозначение левой части). Более точная запись:

$$S = \lim_{\substack{\Delta t_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)(t_{k+1}-t_k) = \lim_{\substack{\Delta t_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\Delta_k.$$

Можно, например, брать разбиение отрезка на n равных частей, так что $\Delta t_k = \frac{1}{n}$ и тогда условие перехода к пределу состоит просто в том, что $n \to \infty$. Но, с другой стороны, точно так же можно находить путь, пройденный в промежутке времени от a до b, т. к. на маленьких участках $[t_k, t_{k+1}]$ скорость можно считать постоянной. Итак,

$$S = \int_a^b v(t)\,dt = \lim_{\substack{\Delta t_k \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{k=0}^{n-1} v(t_k)\Delta t_k.$$

Отметим соглашение о знаке площади: *если кусок площади лежит под осью абсцисс, то его знак считается отрицательным*, т. к. в этом случае $\Delta t_k > 0$, а $v(t_k) < 0$.

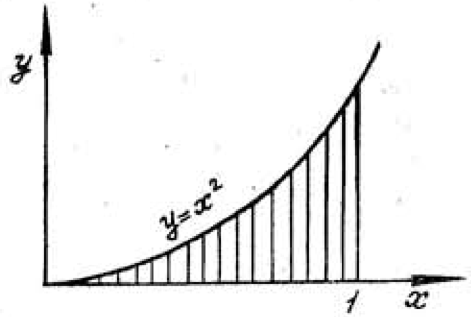

Рис. 10

Пример 1. Найдем площадь S под параболой $y=x^2$ от точки $x=0$ до точки $x=1$ (рис. 10).

Имеем:

$$S = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Пример 2. Площадь под гиперболой $y=1/x$ от $x=1$ до произвольного x равна $\int_1^x t^{-1}\,dt = \ln t\Big|_1^x = \ln x$ (рис. 11).

Таков геометрический смысл натурального логарифма.

Нахождение объемов

Пусть дано тело в трехмерном пространстве, и площадь его сечения плоскостью, параллельной координат-

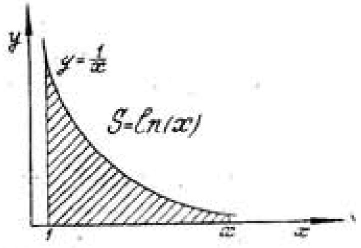

Рис. 11

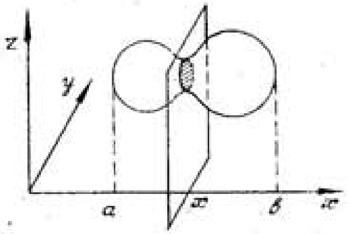

Рис. 12

ной плоскости и проходящей через точку оси x с координатой x, равна $S(x)$.

Тогда его объем V записывается интегралом

$$V = \int_a^b S(x)\,dx,$$

где a, b выбраны так, что проекция тела на ось x содержится в отрезке $[a, b]$ (рис. 12). Для доказательства

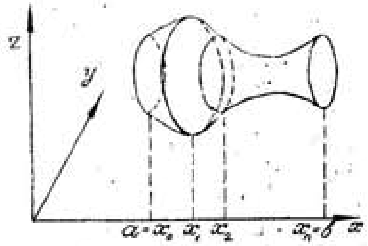

Рис. 13

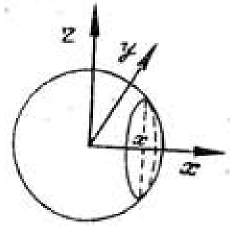

Рис. 14

нужно разбить все тело плоскостями $x=x_k$ на тонкие слои (рис. 13). Здесь $a=x_0<x_1< \ldots <x_{n-1}<x_n=b$. Тогда объем слоя, лежащего над отрезком $[x_k, x_{k+1}]$, равен

приблизительно $S(x_k)(x_{k+1}-x_k)$ (с тем большей точностью, чем меньше $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$), откуда

$$V = \lim_{\substack{\Delta x_k \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{k=0}^{n-1} S(x_k)\,\Delta x_k = \int_a^b S(x)\,dx\,.$$

Пример 3. Рассмотрим шар радиуса R: поместим его центр в начало координат. Его сечение плоскостью, перпендикулярной оси x и пересекающей эту ось в точке с абсциссой x, есть круг радиуса $\sqrt{R^2-x^2}$ (рис. 14), откуда $S(x)=\pi(R^2-x^2)$. Поэтому объем шара

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)\,dx = \pi\left(R^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-}^{} =$$

$$= \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left[R^2(-R) - \frac{(-R^3)}{3}\right] =$$

$$= \frac{2}{3}\pi R^3 + \frac{2}{3}\pi R = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

Итак, объем шара

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3\,.$$

Задачи

4.1. Найти площадь под одной волной синусоиды $y = \sin x$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$ (рис. 15).

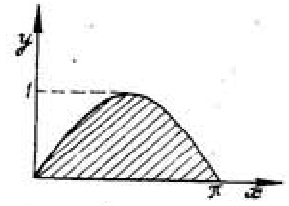

Рис. 15

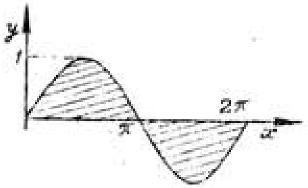

Рис. 16

4.2. Можно ли вычислить суммарную площадь двух волн синусоиды (рис. 16) как $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx$? Чему равны площадь и этот интеграл?

4.3. Найти площадь между параболами $y=x^2$ и $y=2-x^2$ и прямой $x=0$ (рис. 17).

4.4. По графику функции $f(x)$ нарисовать график какой-нибудь ее первообразной (рис. 18, а, б, в).

4.5. Найти объем шарового слоя: куска шара, высекаемого двумя параллельными плоскостями, проходящими по одну сторону от центра.

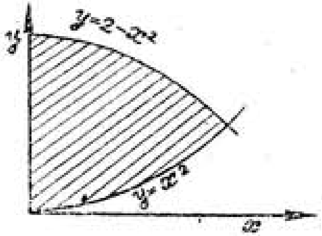

Рис. 17

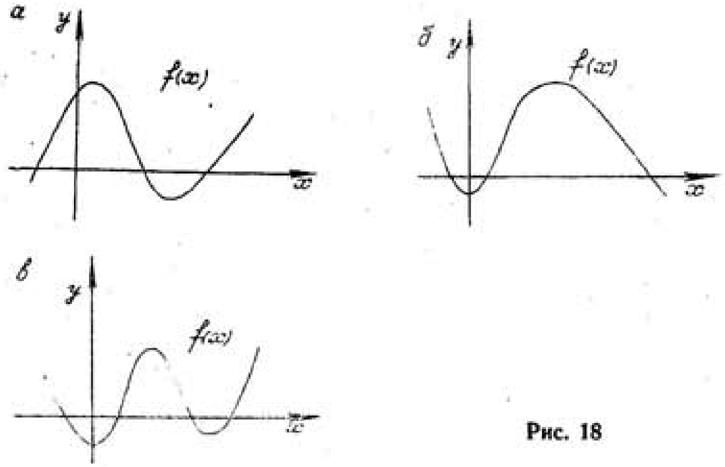

Рис. 18

4.6. Получить формулы для объемов пирамиды и конуса, а также усеченной пирамиды и усеченного конуса.

4.7.* Вывести из задачи 3.4, что объемы, указанные в задачах 4.5, 4.6, могут быть найдены по формуле Симпсона:

$$V = \frac{H}{6}[S_1 + 4S_{cp} + S_2]\,,$$

где H — высота, S_1, S_2 — площади оснований, S_{cp} — площадь срединного сечения.

4.8. Найти предел $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}$, пользуясь представлением интеграла от x^k в виде предела сумм.

5. Радиоактивный распад. Дифференциальное уравнение $y'=ky$.

Основной закон радиоактивного распада состоит в том, что отношение числа распавшихся за любой фиксированный малый промежуток времени атомов к общему числу атомов, имевшихся в начале этого промежутка времени, не зависит от общего числа атомов (если считать это общее число большим). Причина этого состоит в том, что радиоактивный распад означает распад ядер, а ядра не взаимодействуют друг с другом при обычном состоянии вещества, взаимодействуют лишь электронные оболочки. Поэтому вероятность распада данного атома не зависит от того, сколько имеется атомов. Ясно также, что количество атомов, распавшихся за малый промежуток времени Δt, пропорционально Δt.

Обозначим массу нераспавшегося вещества в момент времени t через $y(t)$. За время Δt распадается $y(t)-y(t+\Delta t)$ вещества. Основной закон радиоактивного распада можно переписать так:

$$\frac{y(t)-y(t+\Delta t)}{y(t)} \simeq k\Delta t,$$

где равенство тем точнее, чем меньше Δt. Здесь коэффициент k постоянен и характеризует данное вещество: он равен вероятности распада фиксированного атома за единицу времени. Найденное соотношение можно, поделив на Δt и умножив на $y(t)$, переписать в виде

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{y(t)} \simeq ky(t).$$

Поскольку точность этого равенства растет при $\Delta t\to 0$, переходя к пределу, мы получим точное равенство

$$y'(t)=-ky(t), \qquad (1)$$

представляющее собой *дифференциальное уравнение* радиоактивного распада. Можно еще произвольно задать исходное количество вещества

$$y(0)=y_0, \qquad (2)$$

что представляет собой *начальное условие* для уравнения (1).

Если окажется, что уравнение (1) с условием (2) имеет единственное решение, то можно будет считать, что оно правильно описывает рассматриваемый процесс.

Решим уравнение (1) с начальным условием $y(0)=y_0>0$. На некотором интервале $[0, t_0]$ будет $y(t)>0$. Разделив уравнение (1) на $y(t)$, получим

$$\frac{y'(t)}{y(t)}=-k.$$

В силу правила дифференцирования сложной функции и формулы $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ можно переписать это уравнение в виде

$$[\ln y(t)]'=-(kt)'.$$

Поскольку две первообразные одной функции отличаются на постоянную, получаем $\ln y(t)=-kt+C_1$, или

$$y(t)=e^{-kt+C_1}=e^{C_1}e^{-kt}=Ce^{-kt},$$

где $C>0$. Отсюда видно, что эта формула применима всюду, т. е. при всех t, т. к. наше рассуждение проходит всегда, пока $y(t)>0$. Подставляя $t=0$, находим $C=y_0$ и окончательно

$$y(t)=y_0e^{-kt}. \qquad (3)$$

Таким образом, единственное решение уравнения (1) с начальным условием (2) имеет вид (3), если $y_0>0$. Если $y_0<0$, то можно вместо $y(t)$ рассмотреть функцию $-y(t)$, которая удовлетворяет тому же уравнению с начальным условием $(-y_0)$. Отсюда снова получается формула (3).

Остается рассмотреть случай $y_0=0$. В физической задаче в этом случае $y(t)\equiv 0$ (если не было никакого вещества, то ничего и не останется). Однако математическая задача о решении уравнения (1) с начальным условием (2), где $y_0=0$, в принципе могла бы иметь решение $y(t)\not\equiv 0$. Можно доказать, что такого решения нет. Приведем такое доказательство, а в дальнейшем будем опускать математические подробности, если в данной физической задаче все ясно.

Запишем $y(t)$ в виде $y(t)=z(t)e^{-kt}$. Видимо, должно оказаться тогда, что $z(t)=\text{const}$. Запись такого вида означает, что мы просто ввели новую неизвестную функцию $z(t)=y(t)e^{kt}$. Подставим $y=ze^{-kt}$ в уравнение (1). Тогда получим, пользуясь формулой дифференцирования произведения,

$$z'e^{-kt}+(-k)ze^{-kt}=-kze^{-kt}.$$

Отсюда $z't^{-kt}=0$ и $z'=0$, т. е. $z=C=\mathrm{const}$, а это означает, что $y(t)=Ce^{-kt}$. В частности, если $y(0)=y_0=0$, то $y(t)\equiv 0$. Заодно мы доказали и единственность решения уравнения (1) с любым начальным условием (2), хотя при $y_0\neq 0$ это было ясно и раньше. Выясним смысл коэффициента k, теперь уже исходя из полученных формул. Для этого введем период полураспада T, характеризующий радиоактивный распад вещества и равным времени, за которое распадается половина вещества, имевшегося вначале. Получим

$$y_0e^{-kT}=\frac{y_0}{2},\quad e^{-kT}=\frac{1}{2}\ \text{и}\ e^{kT}=2,$$

откуда

$$kT=\ln 2,\ T=\frac{\ln 2}{k}\quad\text{или}\quad k=\frac{\ln 2}{T}.$$

Формула для решения приобретает вид

$$y=y_0e^{-kt}=y_0e^{-\frac{\ln 2}{T}t}=y_0e^{\ln 2\left(-\frac{t}{T}\right)}=$$

$$=y_0\left(e^{\ln 2}\right)^{\left(-\frac{t}{T}\right)}=y_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Итак, $y(t)=y_0 2^{-\frac{t}{T}}$, где T — период полураспада.

Заметим, что ln2 легко находится, если принять во внимание, что $\log_{10}2=0{,}3010$, $\log_{10}e=0{,}4343$, откуда

$$\ln 2=\frac{\log_{10}2}{\log_{10}e}\approx 0{,}69.$$

Укажем наиболее важные периоды полураспада: $T_{\text{урана}}=4{,}5\cdot 10^9$ лет — это величина периода полураспада наиболее распространенного изотопа урана U^{238}; $T_{\text{радия}}=1600$ лет. Для радиоактивного изотопа углерода ^{14}C период полураспада $T_{^{14}C}=5700$ лет. Этот изотоп используется для определения возраста ископаемых организмов так называемым радиоуглеродным методом, основанным на том, что изотоп ^{41}C попадает в организм лишь во время его жизни, а после смерти организма просто распадается в соответствии с законами радиоактивного распада. Сравнивая количество изотопа ^{14}C в живом организме с его количеством в изучаемом ископаемом образце, можно определить возраст ископаемого образца.

Задачи

5.1. За 30 дней распалось 50% первоначального количества радиоактивного вещества. Через сколько времени останется 1% от первоначального количества?

5.2. В течение года из каждого грамма радиоактивного вещества распадается 0,44 мг (здесь 1 мг $=10^{-3}$ г $=10^{-6}$ кг). Через сколько лет распадется половина имеющегося количества?

5.3. В куске горной породы содержится 100 мг урана и 14 мг уранового свинца. Известно, что уран распадается наполовину за $4{,}5\cdot 10^9$ лет и что при полном распаде 238 г урана образуется 206 г уранового свинца. Определить возраст горной породы. Считать, что в момент образования горная порода не содержала свинца, и пренебречь наличием промежуточных радиоактивных продуктов между ураном и свинцом (т. к. они распадаются намного быстрее урана).

5.4.* В костях живого человека один из $5\cdot 10^{11}$ атомов углерода является изотопом ^{14}C (период полураспада 5700 лет), остальные атомы углерода — устойчивые изотопы ^{12}C. При исследовании образца массы 1 г одной из человеческих костей, найденных на стоянке первобытного человека, за 10 мин зарегистрировано 100 распадов атомов ^{14}C. Считая, что изучаемый образец состоит только из углерода (этого можно добиться специальной обработкой), оценить возраст образца (напомним, что в 12 г углерода содержится $6\cdot 10^{23}$ атомов).

6. Вытекание воды. Дифференциальное уравнение $y'=f(y)$

Экспериментальный факт состоит в том, что скорость вытекания воды через небольшое отверстие равна $v=0{,}6\sqrt{2gh}$, где $g=9{,}8$ м/с² — ускорение свободного падения, h — высота уровня воды над отверстием (рис. 19). Заметим, что $v=v(h)$ является функцией от h, значит, по мере вытекания воды скорость вытекания уменьшается. Если пытаться вывести формулу для v из закона сохранения энергии, то получим $v=\sqrt{2gh}$. Коэффициент 0,6 связан с наличием вязкости.

Составим дифференциальное уравнение вытекания воды. Пусть $S(h)$ — площадь сечения сосуда на высоте h над отверстием и высота h имеет вид $h=h(t)$, т. е. $h(t)$ — функция времени, описывающая вытекание. За время от t до $t+\Delta t$ высота изменится на величину $\Delta h=$

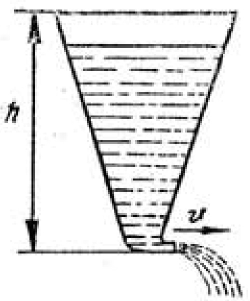

Рис. 19

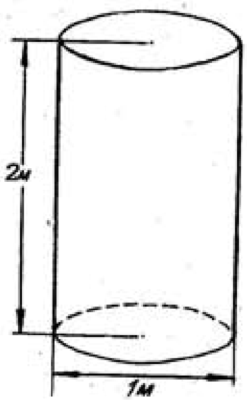

Рис. 20

$=h(t+\Delta t)-h(t)$ (которая отрицательна!), а объем вытекшей жидкости будет примерно равен $V=-S(h)\Delta h$. С другой стороны, если s — площадь сечения отверстия, через которое вытекает вода, то ясно, что

$$\Delta V=v(h)\cdot s\Delta t,$$

т. к. за время Δt вытекает вода того же объема, что и цилиндр сечения s и $v\Delta t$. Точность обеих формул для

ΔV возрастает с уменьшением Δt. Приравнивая найденные выражения для ΔV, получим

$$-S(h)\Delta h\cong v(h)s\Delta t.$$

Деля на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, имеем формулу

$$-S(h)h'=sv(h) \text{ или } h'=-\frac{s}{S(h)}v(h).$$

Решим, например, такую конкретную задачу: за какое время вытечет вся вода из цилиндрического бака высотой 2 м и радиусом основания 0,5 м через отверстие в дне диаметром 1 см (рис. 20)? Здесь $S(h)=\text{const}=\pi\cdot(0{,}5)^2$ (в качестве единицы возьмем метр) или (пока без чисел) $S(h)=\pi R^2$, R — радиус основания бака, $R=0{,}5$ м; $s=\pi r^2$ — площадь отверстия, r — радиус отверстия, $r=0{,}005$ м, $\Delta V=\pi R^2\Delta h\cong-\pi r^2\cdot 0{,}6\sqrt{2gh}\Delta t$, откуда получаем $h'=-0{,}6\frac{r^2}{R^2}\sqrt{2gh}$. Решение этого уравнения аналогично решению уравнения радиоактивного распада. Поделим обе части на $\sqrt{2gh}$. Получим

$$\frac{h'(t)}{\sqrt{2gh(t)}}=-0{,}6\frac{r^2}{R^2},$$

или по формуле дифференцирования сложной функции

$$\left(\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}\right)'=\left(-0{,}6\frac{r^2}{R^2}t\right)',$$

откуда

$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}=-0{,}6\frac{r^2}{R^2}t+C.$$

Теперь определим C. Для этого воспользуемся начальным условием $h(0)=H$, где $H=2$ м — высота бака. Отсюда $C=\frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$. В итоге получим

$$\frac{2\sqrt{h}}{\sqrt{2g}}=-0{,}6\frac{r^2}{R^2}t+\frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}.$$

Момент вытекания всей воды характеризуется тем, что $h=0$, откуда время T вытекания всей воды можно найти из уравнения $0{,}6\frac{r^2}{R^2}T=\frac{2\sqrt{H}}{\sqrt{2g}}$, или

$$T=\frac{2\sqrt{H}R^2}{0{,}6r^2\sqrt{2g}}\cong\frac{2\sqrt{2}\,(0{,}5)^2}{0{,}6\cdot(0{,}5\cdot10^{-2})^2\sqrt{2\cdot9{,}8}}=10^4\text{ с}\cong3\text{ ч}.$$

Вычисления проведены с одной значащей цифрой, т. к. именно с такой точностью даны все данные задачи. При решении с такой точностью легко обойтись без всяких вычислительных средств и целесообразно научиться делать это, чтобы в более сложных случаях уметь сделать грубую прикидку ответа.

Выше решено дифференциальное уравнение $h'=a\sqrt{h}$, где a — постоянная. Более общее уравнение $y'=f(y)$ решается аналогично (его решение выражается через интегралы). А именно, запишем его в виде $\frac{y'}{f(y)}=1$. Если $G(y)$ — первообразная функции $\frac{1}{f(y)}$, т. е. $(G(y))'=\frac{1}{f(y)}$, или $G(y)=\int\frac{dy}{f(y)}$, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем $[G(y(t))]'=(t)'$, откуда $G(y(t))=t+C$. Из уравнения $G(y)=t+C$ можно найти y как функцию от t.

Задачи

6.1. Цилиндрический бак поставлен вертикально и имеет отверстие в дне. Половина воды из полного бака вытекает за 5 мин. За какое время вытечет вся вода?

6.2. Воронка имеет форму конуса, обращенного вершиной вниз, с радиусом основания $R=6$ см и высотой $H=10$ см. За какое время вытечет из воронки вся вода через круглое отверстие диаметром 0,5 см, сделанное в вершине конуса?

6.3. Две одинаковые конические воронки высотой 1 м и радиусом основания 1 м наполнены водой и расположены одна вершиной вверх, а другая — вершиной вниз (рис. 21). В дне каждой из них сделано отверстие диаметром 1 см. Из какой воронки быстрее вытечет вода? Во сколько раз? Найти время вытекания воды из каждой воронки.

6.4. Найти время вытекания воды из чаши, имеющей форму полусферы радиусом 1 м, через отверстие в дне диаметром 1 см (рис. 22).

6.5. Чаша имеет вид параболоида: поверхности вращения куска параболы $y=ax^2$, $0\leqslant x\leqslant b$. Найти время вытекания воды из этой чаши через отверстие в дне диаметром d. Вычислить это время при $a=1$ м$^{-1}$, $b=1$ м, $d=1$ см.

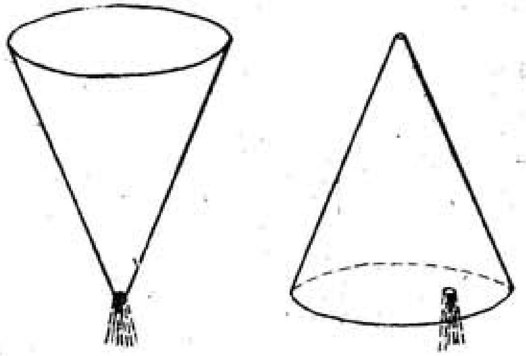

Рис. 21

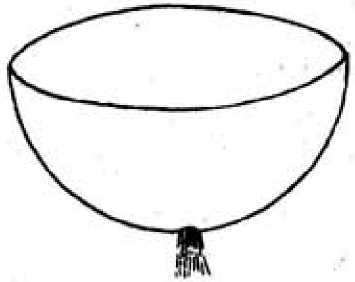

Рис. 22

6.6. Чай охладился за 10 мин от 100 °C до 60 °C. За какое время он остынет до 26 °C, если температура воздуха в комнате 20 °C? (скорость остывания пропорциональна разности температур тела и окружающей среды).

6.7. В баке находится 100 л раствора, содержащего 10 кг соли. В бак непрерывно подается вода (5 л в минуту), которая перемешивается с имеющимся раствором. Смесь вытекает с той же скоростью. Сколько соли останется в баке через час?

6.8. Сосуд объемом 20 л содержит воздух (80% азота и 20% кислорода). В сосуд втекает за 1 с 0,1 л азота, который непрерывно перемешивается, а вытекает такое же количество смеси. Через сколько времени в сосуде будет 99% азота?

6.9. *В химической реакции второго порядка атомы или молекулы вещества А объединяются в молекулы A_2 : $A+A\to A_2$ (так может обстоять дело, например, с атомарным водородом и кислородом и при образовании димеров). При этом скорость реакции пропорциональна количеству сталкивающихся пар, т. е. квадрату имеющейся в рассматриваемый момент массы данного вещества. В некотором сосуде через 5 мин после начала реакции осталась лишь половина непрореагировавшего вещества А. Через какое время этого вещества останется 1% от исходного количества?

7. Атмосферное давление

Найдем зависимость давления воздуха от высоты h над уровнем моря. При этом будем пренебрегать изменением температуры воздуха в зависимости от высоты и эффектами, связанными с горизонтальным движением воздуха (т. е. ветром). Напомним, что на поверхности Земли (на уровне моря) давление равно 10^5 Па $=10^5$ н/м$^2=10$ н/см$^2=1$ атм (т. е. 1 атмосфера), а плотность воздуха равна $\rho_0=0{,}0012$ г/см^3. Понадобится связь давления и плотности при фиксированной температуре (которую будем считать равной 0 °С). Эта связь дается универсальным газовым законом $pV=\frac{m}{\mu}RT$, где p — давление газа, V — занимаемый им объем, m — масса газа, μ — его молекулярный вес, T — абсолютная температура газа, R — универсальная газовая постоянная. При $T=\mathrm{const}$ получаем $pV=Cm$, или $p=C\,\frac{m}{V}$,

или $p=C\rho$, где $\rho=\frac{m}{V}$ — плотность газа. Отметим, что соотношение $p=C\rho$ верно с одной и той же постоянной C для любых объемов газа (в нашем случае воздуха), находящегося при данной температуре. Постоянную C

можно найти, взяв воздух на уровне моря, где $p=p_0$, $\rho=\rho_0$, откуда $C=\frac{p_0}{\rho_0}$, и окончательно связь p и ρ дается формулой

$$p=p_0\frac{\rho}{\rho_0}\ \text{или}\ \rho=\rho_0\frac{p}{p_0}.$$

Теперь найдем давление как функцию высоты, т. е. функцию $p=p(h)$. Рассмотрим, как меняется давление при переходе от высоты h к высоте $h+\Delta h$. Для этого рассмотрим вертикальный столбик воздуха сечением S и затем выделим из него часть между высотами h и $h+\Delta h$ (рис. 23). Для этой части напишем условия равновесия: сумма всех внешних сил равна 0. Внешние си-

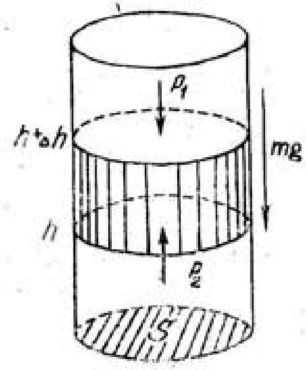

Рис. 23

лы направлены по вертикали и представляют собой: давление сверху P_1, давление снизу P_2 и вес mg. Все силы будем считать с учетом знаков (положительное направление — направление роста h, т. е. вверх).

С учетом этого получим $P_2=p(h)S$, $P_1=-p(h+\Delta h)S$, а вес $P=-mg$. Заметим, что объем столбика между h и $h+\Delta h$ равен $S+\Delta h$. Следовательно, его масса равна $m\cong\rho(h)S\Delta h$ (это приближенная формула, т. к. $\rho(h)$ меняется на отрезке от h до $h+\Delta h$, но ее точность растет с уменьшением Δh. В итоге условие равновесия приобретает вид

$$Sp(h)-Sp(h+\Delta h)\cong\rho(h)gS\Delta h.$$

Деля на $S\Delta h$ и переходя к пределу при $\Delta h\to 0$, получаем $-p'=\rho g$, или $p'(h)=-\rho(h)g$.

Это уже точное равенство. Выразим ρ через p по формуле, приведенной выше: $\rho(h)=\rho_0\frac{p(h)}{p}$. Тогда получим для $p(h)$ дифференциальное уравнение

$$p'(h) = -\frac{\rho^0 g}{p_0}\,p(h) \text{ или } p'(h) = -kp(h),$$

или $p'(h) = -kp(h)$,

где $k=\frac{\rho_0 g}{p_0}$. Но это уравнение уже встречалось нам в теории радиоактивного распада, и его решение нам хорошо знакомо:

$$p(h) = p_0e^{-kh} = p_0e^{-\frac{\rho_0 g}{p_0}h}.$$

Вычислим коэффициент k и найдем значения p на разных высотах. Имеем:

$$k=\frac{\rho_0 g}{p_0}=\frac{1{,}2\cdot10^{-3}\text{г/см}^3\cdot 10\text{ м/с}^2}{10\text{ кг}\cdot\text{м/с}^2\cdot\text{см}^2}=\frac{1{,}2\cdot10^{-3}\text{ г/см}}{10^3\text{ г}}=$$

$$=1{,}2\cdot10^{-6}\frac{1}{\text{см}}=1{,}2\cdot10^{-6}\frac{1}{10^{-5}\text{ км}}=0{,}12\ 1/\text{км}.$$

Итак, $p(h)=p_0e^{-0{,}12h}$, где h — высота в километрах.

Приведем таблицу значений $p(h)$ на разных высотах, полученных по этой формуле. Вычисление можно делать так:

$$e^{-0{,}12\cdot5}=e^{-0{,}6}\cong3^{0{,}5}=(\sqrt{3})^{-1}\cong0{,}6 \text{ и т. д.}$$

Таблица

h, км	p(h), атм
5	0,6
8, 9 (Эверест)	0,3
20	0,1

Заметим, что на высоте 20 км, где летают реактивные самолеты, воздуха в 10 раз меньше, чем на поверхности.

Эти результаты хорошо согласуются с результатами, полученными непосредственным измерением давления (с помощью барометра). Поэтому все сделанные предположения оказываются оправданными.

Задача

7.1. Планета «Адиабата» имеет точно такие же форму, размеры и массу, как Земля, но ее атмосфера состоит из газа, давление и плотность которого связаны по адиабатическому закону $p=C\rho^{4/3}$, причем на поверхности планеты $p=p_0=10$ Н/см^2=1 атм и $\rho=\rho_0=0{,}0012$ г/см^3 (т. е. как на Земле). Найти высоту атмосферы этой планеты.

8. Задача о трении намотанного каната

Для остановки речных судов у пристани с них бросают канат, который наматывают на столб, стоящий на пристани. Один конец каната прикреплен к судну, а другой тянет рабочий на пристани. Известны коэффициент трения каната о столб k (например, характерное значение $k=1/3$), число витков каната вокруг столба (например, 3 витка). Пусть рабочий тянет с силой 100 Н. *Какая сила тормозит судно?*

Рассмотрим силы, действующие на кусок каната, лежащий от направления, составляющего угол φ с некоторым начальным направлением отсчета углов, до направления, составляющего угол $\varphi+\Delta\varphi$ с этим же начальным направлением. Это силы натяжения каната $T(\varphi)$ и $T(\varphi+\Delta\varphi)$, действующие по касательным (рис. 24), реакция столба N, направленная по нормали к канату (считаем $\Delta\varphi$ малым!), и сила трения $F_{тр.}$, тоже направленная по касательной и по величине равная $F_{тр.}=kN$. Векторная сумма этих сил должна быть равна 0. Перенося точки приложения всех сил в точку каната, соответствующую углу φ, получим картинку (рис. 25), из которой,

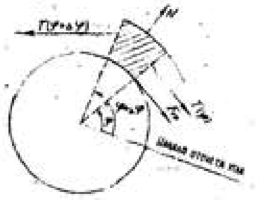

Рис. 24

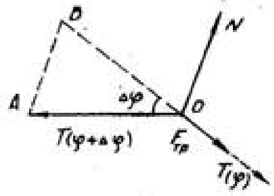

Рис. 25

приравнивая к 0 сумму касательных и нормальных составляющих всех сил, находим, что

$$0=N+B\vec{A}=N-T(\varphi+\Delta\varphi)\sin\Delta\varphi=N-T(\varphi)\Delta\varphi$$

$$0=T(\varphi+\Delta\varphi)\cos\Delta\varphi-T(\varphi)-F_{тр.}\cong T(\varphi+\Delta\varphi)-T(\varphi)-F_{тр.}$$

(мы воспользовались тем, что если x мало, то $\sin x\cong x$ и $\cos x\cong 1$, поскольку $(\sin x)'|_{x=0}=1$, $(\cos x)'|_{x=0}=0$, т. е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}=0).$$

В итоге получим

$$T(\varphi+\Delta\varphi)-T(\varphi)\cong F_{тр.}=kN\cong kT(\varphi)\Delta\varphi,$$

откуда

$$T'(\varphi)=kT(\varphi)\ \text{ и }\ T(\varphi)=T_0e^{k\varphi},$$

где T_0 — сила на уровне $\varphi=0$. Можно, например, взять в качестве $\varphi=0$ то место, где канат сматывается в сторону рабочего, так что $T_0=100$ Н. Если канат делает три оборота, то сила, действующая на судно, при $\varphi=6\pi$, т. е. в этом случае

$$T(\varphi)=T(6\pi)=T_0e^{2\pi}=100e^{2\pi}=50000\text{ Н}.$$

Итак, если рабочий тянет канат с силой 100 Н, приблизительно равной весу груза с массой 10 кг, то судно тормозит сила величиной 5·10 Н, примерно равная весу груза массой 5000 кг=5 т. Эту силу можно, разумеется, сделать сколь угодной большой, увеличивая число оборотов.

9. Ускорение как производная от скорости. Задача о падении в воздухе с учетом сопротивления воздуха

Основная причина полезности анализа в механике состоит в том, что скорость — это производная от пройденного пути, а ускорение — производная от скорости. Первое мы уже использовали. Поясним второе. Если точка движется вдоль прямой и ее скорость в момент времени t равна v(t), то ускорение в этот же момент

$$a(t)=v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v(t+\Delta t)-v(t)}{\Delta t},$$

т. к. ускорение равно скорости изменения v(t). Второй закон Ньютона записывается для материальной точки, движущейся по прямой, в виде

$$ma(t)=F\ \text{ или }\ mv'(t)=F,$$

где F — сила, которая действует на эту материальную точку. Проще всего иметь дело с силами, зависящими только от скорости. А именно, если $F=f(v)$, то получим уравнение

$$mv'(t)=f(v(t)),\ \text{ или }\ v'(t)=\frac{1f}{m}(v(t)),$$

оно решается так, как было объяснено в конце п. 6. Приведем пример задачи, которая может быть решена таким образом. Пусть требуется описать падение тела в воздухе при условии, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости (опыт показывает, что это достаточно хорошо соответствует действительности). Тогда сила, которая действует на падающее тело, равна $F=mg-F_{сопр.}$, или $F=mg-av^2$, где a — коэффициент пропорциональности (положительным считаем здесь направление вниз). В итоге $mv'=mg-av^2$ или $v'=g-kv^2$, где $k=a/m$. Решим это уравнение. Заметим, что в начале движения $v=0$ и $g-kv^2>0$. Соотношение $g-kv^2>0$ останется верным в течение всего времени движения, как мы увидим ниже, а пока будем решать уравнение там, где $g-kv^2>0$. Деля обе части уравнения на $g-kv^2$, получаем $\frac{v'}{g-kv^2}=1$. Пусть F(v) — первообразная функции $\frac{1}{g-kv^2}$, т. е. $F'(v)=\frac{1}{g-kv^2}$. Тогда по формуле дифференцирования сложной функции получаем $[F(v(t))]'=(t)'$ или $F(v(t))=t+C$. Найдем $F(v)$: $F(v)=\int\frac{1}{g-kv^2}\,dv$. Для этого напишем

$$\frac{1}{g-kv^2}=\frac{1}{(\sqrt{g})^2-(\sqrt{k}v)^2}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{g}}\left(\frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{k}v}+\frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{k}v}\right).$$

Легко проверяется, что

$$\int \frac{1}{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v}\,dv = \frac{1}{\sqrt{k}}\ln(\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v),$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v}\,dv = -\frac{1}{\sqrt{k}}\ln(\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v).$$

Отсюда

$$\int \frac{1}{g-kv^2}\,dv = \frac{1}{2\sqrt{gk}}\,[\ln(\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v)-$$

$$-\ln(\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v)] = \frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v}$$

(постоянную C для краткости не пишем). Итак, получаем

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v} = t + C\,.$$

При $t=0$ должно быть $v=0$, т. к. падение происходит без начальной скорости. Подставляя $t=0$ и $v=0$ в формулу, получаем $0=0+C$, т. е. $C=0$. Итак,

$$\frac{1}{2\sqrt{gk}}\ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v} = t. \text{ Отсюда } \ln\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v} = 2\sqrt{gk}\,t$$

и

$$\frac{\sqrt{g}+\sqrt{k}\,v}{\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v} = e^{2\sqrt{gk}\,t}, \text{ или } \sqrt{g}+\sqrt{k}\,v = e^{2\sqrt{gk}\,t}\times(\sqrt{g}-\sqrt{k}\,v),$$

$$\text{или } v\sqrt{k}\,(e^{2\sqrt{gk}\,t}+1) = \sqrt{g}\,(e^{2\sqrt{gk}\,t}-1), \text{ или}$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{e^{2\sqrt{gk}\,t}-1}{e^{2\sqrt{gk}\,t}-1}\,.$$

Функция

$$f(z) = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1} = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}}$$

называется гиперболическим тангенсом и обозначается thz:

$$\operatorname{th} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{e^{z}+e^{-z}} = \frac{e^{2z}-1}{e^{2z}+1}$$

(другие важные гиперболические функции — гиперболический косинус $\operatorname{ch} z = \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}$ и гиперболический синус $\operatorname{sh} z = \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}$). Если принять это обозначение, то получаем

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}\ \operatorname{th}\ (\sqrt{gk}\,t)\,.$$

Заметим, что $\operatorname{th} z = \frac{1-e^{-2z}}{1+e^{-2z}}$ (поделили числитель и знаменатель на e^{2z}). Поэтому $\lim\limits_{z\to+\infty}\operatorname{th} z = 1$. Отсюда $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = \sqrt{\frac{g}{k}}$. Таким образом, скорость $v(t)$ не растет неограниченно, но имеет при $t\to+\infty$ предел $v_{пр}=\sqrt{\frac{g}{k}}$.

Выразим k через g и $v_{пр}$. Получим: $k=\frac{g}{v}$ и дальше $\sqrt{gk}=\frac{g}{v_{пр}}$, откуда формула для $v(t)$ приобретает вид

$$v(t) = v_{пр}\operatorname{th}\frac{gt}{v_{пр}}\,.$$

Интересно ответить на следующие вопросы:

1. Что происходит при малых t, т. е. когда скорость невелика и сопротивление воздуха влияет мало?

2. За какое время скорость практически достигает предельной, например, становится больше 90% предельной?

Начнем с первого вопроса. Выясним, как ведут себя thz при малых z. Видно, что $\operatorname{th} z \cong z$ при малых z, поскольку $e^{2z}=1+2z$ при малых z (иначе: $\text{th}0=0$, а $(\text{th}z')\big|_{z=0}=1$. Отсюда $\text{th}z\cong z$ при малых z. Поэтому при малых t получаем

$$v(t)\cong v_{\text{пр}}\frac{gt}{v_{\text{пр}}}=gt,$$

т. е. обычную формулу свободного падения (с нулевой начальной скоростью).

Ответим на второй вопрос. Условие $\text{th}z=0{,}9$ в силу формулы $\text{th}z=\dfrac{1-e^{-2z}}{1+e^{-2z}}$ означает приблизительно, что $e^{-2z}=0{,}05$, т. е. $2z=\ln 20=3{,}0$, или $z\cong1{,}5$. Во всяком случае, при $z=1{,}6$ $\text{th}z>0.9$. Поэтому условие $\dfrac{v}{v_{\text{пр}}}>0{,}9$ заведомо выполняется при $\dfrac{gt}{v_{\text{пр}}}>1{,}6$, т. е. $t>\dfrac{1{,}6v_{\text{пр}}}{g}$. Это ответ на второй вопрос.

Интересно также понять, когда (при малых t) еще можно пренебречь сопротивлением воздуха? Для этого надо уметь оценивать разность $e^z-(1+z)$ при малых z. Можно доказать, что $e^z-(1+z)\cong\dfrac{z^2}{2}+\dfrac{z^3}{6}$. Отсюда получается, что $\text{th}z-z\cong-z^3/3$. Если мы хотим иметь относительную погрешность меньше 0,1, то надо взять $z^2/3<<0{,}1$, т. е. $z<0{,}5$ заведомо достаточно. В нашей задаче это означает, что $\dfrac{gt}{v_{\text{пр}}}<0{,}5$, т. е. $t<0{,}5\dfrac{v_{\text{пр}}}{g}$.

Экспериментально известно, что при падении человека (без парашюта) $v_{\text{пр}}=50$ м/с. Здесь формула $v=gt$ хороша при $t<2{,}5$ с, а предельная скорость почти набирается за 8 с.

Задачи

9.1. Лодка замедляет движение под действием сопротивления воды, пропорционального скорости лодки. Начальная скорость лодки 1,5 м/с, через 4 с скорость ее становится равной 1 м/с. Когда скорость уменьшится до 1 м/с? Какой путь пройдет лодка до остановки?

9.2. Мотор лодки создает постоянную силу тяги, а сила трения о воду пропорциональна скорости. а) Доказать, что скорость лодки не может превысить некоторой предельной скорости $v_{\text{пр}}$. б) Найти скорость лодки через 5 с после начала движения, если $v_{\text{пр}}=30$ км/ч, а скорость ее через 2 с была равна 5 км/ч. в) Найти путь, проходимый лодкой за 5 с. г) Когда скорость лодки достигнет 90% от $v_{\text{пр}}$?

9.3. При падении тела в жидкости для небольших скоростей сила сопротивления пропорциональна скорости. а) Считая этот закон выполненным, доказать существование предельной скорости падения. б) Считая предельную скорость равной 5 м/с, выяснить, через какое время скорость тела станет равной 4,5 м/с. в) Найти путь, проходимый падающим телом за первые 4 с падения.

9.4. а) Нарисовать графики функций $y=\text{ch}\,x$, $y=\text{sh}\,x$, $y=\text{th}\,x$. б) Доказать, что $(\text{ch}\,x)'=\text{sh}\,x$, $(\text{sh}\,x)'=\text{ch}\,x$, $(\text{th}\,x)'=\dfrac{1}{\text{ch}^2x}$. в) Доказать, что $\text{ch}^2-\text{sh}^2x=1$.

г) Доказать теоремы сложения:

$$\text{ch}(x+y)=\text{ch}\,x\cdot\text{ch}\,y+\text{sh}\,x\cdot\text{sh}\,y,$$
$$\text{sh}(x+y)=\text{sh}\,x\cdot\text{ch}\,y+\text{ch}\,x\cdot\text{sh}\,y,$$
$$\text{th}(x+y)=\frac{\text{th}\,x+\text{th}\,y}{1+\text{th}\,x\cdot\text{th}\,y}.$$

9.5. *Футбольный мяч, имеющий массу 0,4 кг, брошен вверх со скоростью 20 м/с. Сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости и равно 0,005 Н при скорости 1 м/с. Вычислить время подъема мяча и наибольшую высоту подъема. Как изменятся результаты, если пренебречь сопротивлением воздуха?

9.6. *Футбольный мяч, имеющий массу 0,4 кг, падает с высоты 20 м (без начальной скорости). Сопротивление воздуха пропорционально квадрату его скорости и равно 0,005 Н при скорости 1 м/с. Найти время падения и скорость мяча в конце падения. Как изменится результат, если не учитывать сопротивление воздуха?

10. Реактивное движение. Формула Циолковского

Рассмотрим движение ракеты в космосе (рис. 26). Сначала пренебрежем всеми внешними силами, действующими на ракету. Основными параметрами, характеризующими ракету и ее двигатель, являются:

u^0 — скорость истечения газов из сопла ракеты (разумеется, это скорость относительно корпуса ракеты; для

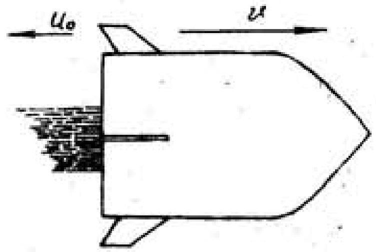

Рис. 26

простоты считаем ее постоянной, она зависит от вида применяемого топлива и составляет 2 км/с для пороха и около 4 км/с для жидкого топлива;

M — исходная масса ракеты вместе с горючим;

M_k — конечная масса ракеты после выгорания всего горючего.

Напишем уравнение движения ракеты, считая, что она движется по прямой линии. Пусть $z(t)$ — координата ракеты (вдоль этой прямой) в момент времени t; $v(t)=z'(t)$ — скорость ракеты в момент времени t; $m(t)$ — масса ракеты в момент времени t (эта масса уменьшается по мере сгорания горючего).

Воспользуемся законом сохранения импульса (количества движения). При этом удобно ввести мгновенную систему координат, связанную с летящей ракетой (точнее, равномерно движущуюся с той скоростью, с которой ракета движется в момент t). В этой системе координат скорость ракеты (и имеющегося в ней топлива) в момент времени t равна 0. Рассмотрим момент $t+\Delta t$ в этой же системе координат. Предположим, что за это время в ракете сгорело и вылетело из нее топливо массой $(-\Delta m)=m(t)-m(t+\Delta t)$. Скорость самой ракеты (с остатками топлива увеличилась на $\Delta v=v(t+\Delta t)-v(t)$ и в рассматриваемой системе координат стала равной Δv, в то время как скорость вылетевшего топлива равна

$(-u_0)$ (с учетом направления). Суммарный импульс в момент $t+\Delta t$ примерно равен

$$(-\Delta m)(-u_0)+m\Delta v$$

с точностью, растущей с уменьшением Δt (здесь неточность связана с тем, что со временем меняется масса $m=m(t)$ и, кроме того, скорость вылета горючего в рассматриваемой системе координат будет равна u_0 лишь в момент времени t, т. к. дальше сама ракета начнет двигаться). Приравнивая суммарный импульс 0, получим

$$0\cong(-\Delta m)(-u_0)+m\Delta v.$$

Деля обе части на Δt и переходя к пределу при $\Delta t\to 0$, получим точное равенство

$$0=m'(t)u_0+m(t)v'(t),$$

откуда

$$v'(t) = -u_0\frac{m'(t)}{m(t)}\,.$$

или

$$v'(t)=[-u_0\ln m(t)]'.$$

Отсюда

$$v(t)=-u_0\ln m(t)+C.$$

Для нахождения C положим $t=0$ и будем считать, что $v(0)=0$, т. е. ракета движется без начальной скорости. Тогда получим $m(0)=M_0$, и уравнение при $t=0$ примет вид

$$0=-u_0\ln M_0+C, \text{ т. е. } C=u_0\ln M_0.$$

Поэтому формула для v приобретает вид

$$v(t)=-u_0\ln m(t)+u_0\ln M_0=u_0\ln\frac{M_0}{m(t)}\,.$$

В момент, когда все топливо израсходовано, получим $m(t)=M_k$,

$$v = u_0\ln\frac{M_0}{M_k}\,.$$

Эта формула называется *формулой Циолковского*. Основной вывод из этой формулы: ракета может достичь скорости, большей, чем скорость истечения газов из сопла, хотя для этого отношение массы M_0 ракеты с топливом к массе ракеты без топлива M_k должно быть

11—357

очень велико. Для увеличения отношения M_0/M_k на разных этапах полета ракеты делают многоступенчатыми.

Проанализируем, какая сила тяги действует на летящую ракету вследствие выхлопа газов из сопла. Из формулы

$$mv'(t) = -u_0 m'(t),$$

полученной выше, находим

$$mv'(t) = -u_0 m'(t).$$

Положим $\mu = \mu(t) = -m'(t)$, так что μ — расход топлива. Из формулы видно, что если положить $u_0\mu = F_т$, то уравнение примет вид второго закона Ньютона:

$$mv'(t) = F_т,$$

поэтому $F_т$ можно считать силой тяги двигателя, ибо она создает ускорение ракеты так, как если бы она была внешней силой.

Опишем теперь движение ракеты с учетом других действующих на нее сил. Рассмотрим, например, ракету, стартующую вертикально с поверхности Земли. В этом случае следует учесть силу тяжести. Уравнение приобретает вид

$$mv'(t) = F_т - mg = -u_0 m'(t) - mg = u_0\mu - mg$$

(положительным считается направление вверх). Чтобы ракета оторвалась от Земли, необходимо выполнение условия $u_0\mu_0 - M_0 g > 0$, где $\mu_0 = \mu(0)$ — расход топлива в начальный момент времени. Это, в частности, ограничивает начальную массу: $M_0 < \frac{u_0\mu_0}{g}$. Далее, деля уравнение на $m(t)$, получим

$$v = u_0 \frac{m'}{m} - g,$$

или $(v(t))' = (-u_0 \ln m)' + (-gt)' = [-u_0 \ln m - gt]'$, откуда $v(t) = -u_0 \ln m(t) - gt + C$. При $t=0$ имеем $v=0$ и $m = M_0$, откуда $C = u_0 \ln M_0$, и в итоге

$$v(t) = u_0 \ln \frac{M_0}{m(t)} - gt.$$

Если полет продолжался в течение времени T и масса ракеты в конце полета оказалась M_k, то получим следующую скорость в конце полета:

$$v = u_0 \ln \frac{M_0}{M_k} - gt.$$

Здесь мы не учитывали изменения силы тяжести в зависимости от высоты. При расчете космических полетов это приходится учитывать наряду с сопротивлением воздуха и многоступенчатостью ракеты.

Задача

10.1.* Ракета, масса которой вместе с топливом $M = 10$ т, падая на Землю со скоростью $v_0 = 3$ км/с вертикально вниз, начинает торможение, включив на время $T = 10$ с двигатель, сопло которого обращено к Земле. За время торможения двигатель расходует $m = 5$ т горючего, скорость истечения продуктов которого из сопла ракеты равна $u_0 = 4$ км/с. Какова будет скорость ракеты после окончания торможения? Изменением силы тяжести с высотой и сопротивлением воздуха пренебречь.

11. Движение в силовом поле. Колебания

Пусть материальная точка (массой m) может двигаться вдоль оси x и при этом в точке с координатой x на нее действует сила $F = F(x)$, т. е. действующая на частицу сила зависит только от ее координаты. Через $x(t)$ обозначим координату частицы в момент времени t, $v(t) = x'(t)$ — скорость частицы в момент t, $a(t) = v'(t)$ — ускорение частицы в момент t. Функция $a(t)$ получается из функции $x(t)$ двукратным дифференцированием, поэтому ее часто обозначают также $x''(t)$, что мы и будем делать в дальнейшем. Согласно второму закону Ньютона,

$$mx'' = F(x),$$

или подробнее

$$mx''(t) = F(x(t)).$$

Деля обе части этого уравнения на m и вводя обозначение $f(x) = \frac{F(x)}{m}$, получаем

$$x''(t) = f(x(t)), \text{ или, короче, } x'' = f(x). \quad (1)$$

Функцию $x'' = a(t)$ называют также второй производной функции $x(t)$ по t и обозначают через $\frac{d^2x(t)}{dt^2}$.

Силу, заданную в каждой точке пространства и зави-

11*

сящую только от этой точки (важно, что она не зависит от скорости движения точки, как сила трения), называют *силовым полем*. Например, силовым полем является гравитационное поле неподвижных масс (т. е. совокупность сил притяжения нескольких неподвижных точек). Задача об обращении планеты вокруг Солнца — пример задачи о движении частицы в силовом поле. Ответ в этой задаче угадал Кеплер (поэтому она часто называется кеплеровой задачей, или задачей Кеплера): используя астрономические наблюдения Тихо Браге, он заметил, что планеты движутся по эллипсам. Ньютон сформулировал закон всемирного тяготения и показал, как из него вытекает ответ Кеплера (т. е. решил задачу Кеплера). Эта задача сводится к исследованию уравнения вида (1), но с вектор-функцией $\vec{x}(t)$ вместо скалярной функции $x(t)$ (при этом функция f тоже превращается в векторную функцию $\vec{f}(\vec{x})$), значение которой в каждой точке трехмерного пространства есть трехмерный вектор. В этом параграфе будет рассматриваться движение вдоль некоторой прямой (оси x); при этом сила тоже предполагается направленной вдоль этой прямой. Приведем примеры.

Пример 1. Шарик на пружинке. Рассмотрим шарик с массой m, лежащий на гладком горизонтальном столе и прикрепленный к стене пружинкой. Направим ось x вдоль оси пружинки (рис. 27) и поместим на ней начало координат в положении равновесия пружинки. Тогда при отклонении шарика вдоль оси x возникает сила, направленная вдоль оси x и равная $F(x)=-kx$, где коэффициент $k>0$ характеризует жесткость пружинки. Если $x>0$, то сила $F(x)$ направлена влево, т. к. пружинка растянута, а если $x<0$, то сила направлена вправо, т. к. пружинка сжата (см. рис. 27 б, в). Это соответствует формуле $F(x)=-kx$. Уравнение (1) приобретает в этом случае вид

$$x''=-\frac{k}{m}x, \text{ или } x''=\omega^2 x, \quad \text{где } \omega=\sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{2}$$

Выведем для общего уравнения (1) закон сохранения энергии. Для этого перепишем его в виде

$$v'(t)=f(x(t))$$

и умножим обе части на $v(t)=x'(t)$. Тогда получим

$$v(t)v'(t)=f(x(t))x'(t). \tag{3}$$

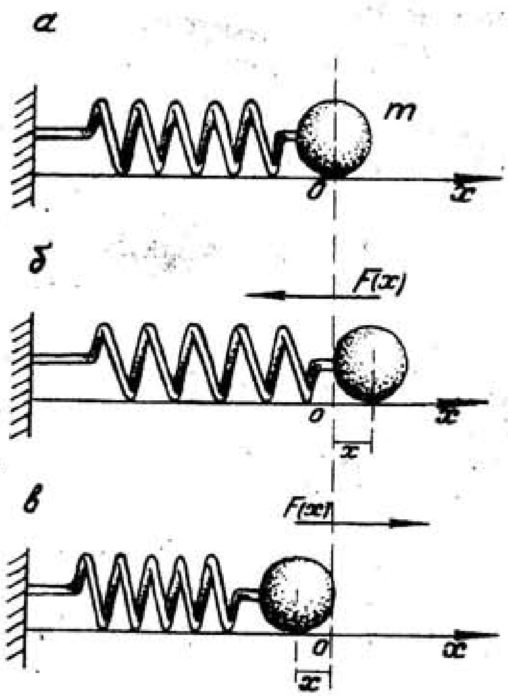

Рис. 27

Левая часть может быть записана как производная:

$$v(t)v'(t)=\left(\frac{1}{2}v^2(t)\right)'.$$

Попробуем сделать то же самое с правой частью. Обозначим через $g(x)$ первообразную функции $f(x)$, т. е. $g(x)=\int f(x)dx$, тогда $g'(x)=f(x)$; теперь положим $U(x)=-g(x)$. Тогда

$$f(x(t))x'(t)=(g(x(t)))'=-(U(x(t)))'$$

по правилу дифференцирования сложной функции. Из (3) получаем

$$\left[\frac{v(t)^2}{2}\right]'=-[U(x(t))]'$$

и, следовательно,

$$\frac{v^2(t)}{2}=-U(x(t))+E,$$

где E — постоянная. Иначе:

$$\frac{v^2(t)}{2} + U(x(t)) = E.$$

Функция $U(x)$ называется потенциальной энергией. Она может быть записана, например, в виде

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(x)\,dx.$$

Если считать, что $m=1$ (что всегда может быть достигнуто изменением единиц массы), то $U(x)$ — работа, которая совершается силами данного поля при перемещении тела из точки x в фиксированную точку x_0. Выбор точки x неважен, при другом выборе x_0 величина $U(x)$ изменится на постоянную

Используем закон сохранения энергии для решения задачи о шарике на пружинке. В этом случае

$$U(x) = \frac{k}{m} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{\omega^2 x^2}{2},$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, откуда закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{(x')^2(t)}{2} + \frac{\omega^2 x^2(t)}{2} = E.$$

При данном E это уравнение близко к типу, который мы уже изучали. Если $E=0$, то $x(t)=0$, что соответствует тому, что шарик покоится в положении равновесия. Пусть $E>0$. Тогда решая уравнение относительно $x'(t)$, получаем

$$x'(t) = \pm\sqrt{2E-\omega^2 x^2(t)}.$$

Считая, что подкоренное выражение не обращается в 0 (на самом деле оно может обращаться в 0 лишь при отдельных значениях параметра t), получаем

$$\frac{x'(t)}{\pm\sqrt{2E-\omega^2 x^2(t)}} = 1. \qquad (4)$$

В соответствии со способом решения уравнений такого типа, описанным в 6, теперь следует искать перво-

образную от функции $h(x) = \frac{1}{\pm\sqrt{2E-\omega^2 x^2}}$. Перепишем ее в виде

$$h(x) = \frac{\pm 1}{\sqrt{2E-\omega^2 x^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2E}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\omega^2}{2E}x^2}} =$$

$$= \pm\frac{1}{\sqrt{2E}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\omega x}{\sqrt{2E}}\right)^2}}.$$

Из закона сохранения энергии ясно, что $\frac{\omega^2 x^2(t)}{2} \leqslant E$, откуда $|x(t)| \leqslant \frac{\sqrt{2E}}{\omega}$. Положим $A = \frac{\sqrt{2E}}{\omega}$.

В дальнейшем будет ясно, что $|x(t)|$ иногда достигает значения A. Число A называется ***амплитудой*** рассматриваемого колебания. Имеем $\frac{1}{\sqrt{2E}} = \frac{1}{\omega A}$, и нужно вычислить первообразную для функции

$$h(x) = \pm\frac{1}{\omega A} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}}.$$

Для этого сначала вычислим производную от функции $y=\arcsin x$, обратной к функции $x=\sin y$ при $y\in[-\pi/2, \pi/2]$. По правилу дифференцирования обратной функции

$$(\arcsin x)' = \left.\frac{1}{(\sin y)'}\right|_{y=\arcsin x} =$$

$$= \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\cos\alpha},$$

где $\alpha=\arcsin x$ — такой угол, что $\sin\alpha=x$ и $-\pi/2\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$. Поэтому $\cos\alpha\geqslant 0$ и $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$. Итак,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

По формуле дифференцирования сложной функции получаем:

$$\left(\arcsin\frac{x}{A}\right)' = \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{A}\right)^2}},$$

откуда первообразная для функции $h(x)$ имеет вид

$$\pm\frac{1}{A}\arcsin\frac{x}{A}.$$

Из уравнения (4) получаем теперь

$\pm\frac{1}{\omega}\arcsin\frac{x}{A} = t - t_0$, здесь t_0 — произвольная постоянная. Умножая обе части равенства на $\pm\omega$ и беря sin от обеих частей, получаем

$$x = A\sin(\pm\omega(t-t_0)) = \pm A\sin(\omega t+\varphi),$$

где φ — произвольная постоянная, называемая *сдвигом фазы*. Кстати, беря $\varphi = \varphi_1+\pi$, получим $\sin(\omega t+\varphi) = -\sin(\omega t+\varphi_1)$, так что выбором φ можно менять знак перед A. Таким образом, если считать сдвиг фазы произвольным, то можно опустить $\pm$, и окончательно получаем:

$$x(t) = A\sin(\omega t+\varphi). \qquad (5)$$

Легко непосредственно проверить, что такая функция $x(t)$ является решением уравнения (2) уже при всех t. Величина ω называется круговой частотой колебания. Период колебания равен $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Пример 2. Рассмотрим настоящий математический маятник (рис. 28). Пусть l — длина его нити, m — масса шарика (малого размера по сравнению с l), подвешенного на нити, а $x = x(t)$ — угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия. Рассматривая силы, действующие на шарик, и ускорение шарика, можно получить уравнение:

$$mlx'' = mg\sin x$$

или

$$x'' = -\frac{g}{l}\sin x. \qquad (6)$$

Закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{(x')^2}{2} + \frac{g}{l}(1-\cos x) = E.$$

Пользуясь этим точным законом, можно найти скорость шарика в любой точке x и все действующие на не-

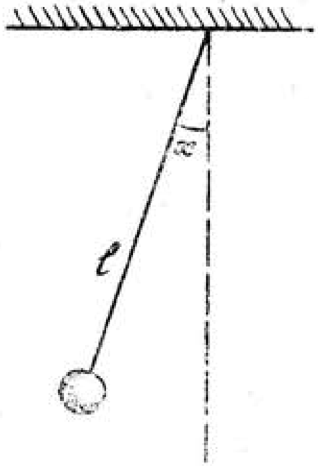

Рис. 28

го в этой точке силы. При малых x уравнение (6) приближенно записывают в виде

$$x'' = -\frac{g}{l}x,$$

что совпадает с уравнением (2), но с $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Поэтому можно ожидать (и это на самом деле так), что при малых отклонениях маятника от положения равновесия решения (6) будут близки к решениям вида (5). При этом период малых колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Пример 3. Рассмотрим колебания шарика на пружинке с учетом трения, считая трение пропорциональным скорости. Тогда к силе упругости пружинки прибавляется сила трения $F_{тр}=-bx'$, и уравнение приобретает вид: $mx''=-kx-bx'$, или

$$x''+\gamma x'+\omega^2 x=0, \qquad (7)$$

где $\gamma=\frac{b}{m}$, $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. Попробуем решить уравнение (7). Для этого введем неизвестную функцию $y(t)=e^{\alpha t}x(t)$. Чтобы составить для нее уравнение, подставим $x(t)=e^{-\alpha t}y(t)$ в уравнение (7). Дифференцируя выражение $x(t)$ через $y(t)$, получаем:

$$x'(t)=e^{-\alpha t}y(t)-\alpha e^{-\alpha t}y(t),$$

$$x''(t)=e^{-\alpha t}y''(t)-2\alpha e^{-\alpha t}y'(t)+\alpha^2 e^{-\alpha t}y(t).$$

Подставляя эти выражения в (7), имеем:

$$e^{-\alpha t}[y''(t)+(\gamma-2\alpha)y'(t)+(\alpha^2-\gamma\alpha+\omega^2)y(t)]=0.$$

Чтобы уничтожить член с $y'(t)$, возьмем $\alpha=\frac{\gamma}{2}$. Тогда после сокращения на $e^{-\alpha t}$ получим уравнение

$$y''(t)+\omega_1^2 y(t)=0, \quad \omega_1=\sqrt{\omega^2-\frac{\gamma^2}{4}}.$$

Будем считать, что трение не очень велико, так что $\omega_2>\frac{\gamma^2}{4}$, и $\omega_1>0$. Тогда для $y(t)$ получаем уравнение вида (2), но с ω_1 вместо ω. Поэтому $y(t)=A\sin(\omega_1 t+\varphi)$, и

$$x(t)=Ae^{-\frac{\gamma t}{2}}\sin(\omega_1 t+\varphi). \qquad (8)$$

Формула (8) описывает затухающие колебания. График $x(t)$ имеет вид колебаний с амплитудой, убывающей по закону $Ae^{-\gamma t/2}$ (рис. 29). Трение уменьшает частоту колебаний, т. к. $\omega_1<\omega$. Если $\gamma=0$, то формула (8) переходит в формулу (5), описывающую колебания без трения.

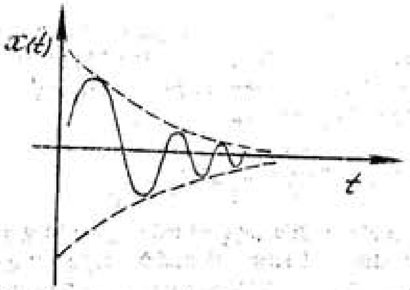

Рис. 29

Задачи

11.1. Предположим, что вдоль всей земной оси от Северного полюса к Южному прорыт колодец и какой-то предмет уронили в этот колодец (без начальной скорости) на Северном полюсе. Как он будет двигаться? За какое время он достигнет центра Земли? Достигнет ли он Южного полюса? При решении надо использовать тот факт, что на небольшое тело, находящееся внутри Земного шара на расстоянии d от его центра, действует сила притяжения, направленная к центру Земли и равная по величине силе притяжения его материальной точкой (расположенной в центре Земли), имеющей массу, равную массе лишь той части Земного шара, которая попала в шар радиуса d с центром в центре Земли (это утверждение, доказанное Ньютоном, равносильно тому, что если есть тонкая однородная сфера, то внутри нее все силы притяжения уравновешиваются, а снаружи ее притяжение таково, как если бы вся масса была сосредоточена в центре). При решении задачи считать, что плотность Земли всюду постоянна. Радиус Земного шара равен 6400 км. Сопротивлением воздуха пренебречь.

11.2.* На Южном полюсе Земли установлена пушка, дуло которой направлено вертикально вверх. Из этой пушки выстрелили снарядом. Пренебрегая сопротивлением воздуха и притяжением снаряда и Земли к другим небесным телам, описать, как будет меняться скорость снаряда в зависимости от расстояния снаряда от Земли. С какой скоростью должен вылететь снаряд, чтобы он никогда не вернулся на Землю?

11.3.* Решить уравнение $y''-k^2y=0$ и с помощью этого решения описать колебания шарика на пружинке (пример 3) с большим трением, т. е. при условии $\omega^2<\gamma^2/4$ в обозначениях примера 3. Сколько раз может решение $x(t)$ в этом случае обращаться в 0?

Ответы и указания к задачам

1.1. 48 км/ч. 1.2. $a>0$, $b>0$, $c>0$. 1.3. Рис. 30. 1.4. $y=4-x$.

1.5. 17; —3. 1.6. а) $3972x(x^2+1)^{1985}$; б) $2x\cos x^2$; в) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$;

г) $2xe^{x^2}$; д) $e^x \cdot e^e$; е) $-\sin x \cdot \cos\cos x$; ж) $\dfrac{1}{2}x^4(x^5+1)^{-9/10}$.

1.7. 1/4.

1.8. Если поместить начало координат в центр окружности и направить ось x туда, где движущаяся точка находится в начальный момент $t=0$, то $x=R\cos\omega t$, $y=R\sin\omega t$, где R — радиус окружности, ω — угловая скорость движения ($\omega>0$, если движение происходит против часовой стрелки, и $\omega<0$, если по часовой стрелке). Тогда вектор скорости имеет вид $(-R\omega\sin\omega t$,

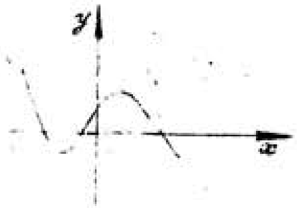

Рис. 30

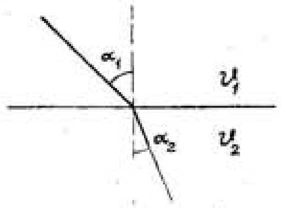

Рис. 31

$R\omega\cos\omega t)$ и перпендикулярен радиусу-вектору $(R\cos\omega t$, $R\sin\omega t)$, направленному из начала координат в движущуюся точку, поскольку скалярное произведение этих векторов равно 0.

1.9. Этот путь состоит из таких двух отрезков прямых (он преломляется на границе раздела сред), что если α_1, α_2 — углы этих отрезков с перпендикуляром к границе раздела (рис. 31), то $\dfrac{\sin\alpha_1}{v_1} = \dfrac{\sin\alpha_2}{v_2}$.

2.1. а) 8; б) 993; в) 45; г) 33; д) 1986; е) 5; ж) 100; з) 1986; и) x.

2.2. Указание: взять логарифм по основанию b от обеих частей формулы $a^{\log_a x}=x$.

2.3. Указание: воспользоваться результатом задачи 2.2 с $x=b$. 2.4. а) 4,6; б) —2,3; в) 1,6; г) 0,7; д) 1,5; е) 0,69; ж) 3,2; з) 3,0; и) —0,69; к) —4,6; л) 22000. Указание: $\log_{10}e^{10}=10\log_{10}e\cong 4{,}34$, откуда $e^{10}\cong 10^{4{,}34}=10^4\cdot 10^{0{,}3}\cdot 10^{0{,}04} = 10^4\cdot 10^{\log_{10}2}\cdot 10^{0{,}04}=2\cdot 10^4\cdot e^{0{,}04\ln 10} \cong 2\cdot 10^4\cdot e^{0{,}1} = 2\cdot 10^4(1+0{,}1)=22000$.

2.5. а) $\log_2 3>\log_3 4$. Указание: $2\log_2 3=\log_2 9>3$, $2\log_3 4=\log_3 16<3$; б) $\log_5 7<\lg_7 8$. Указание: проверить, что $5\log_5 7>6>5\log_7 8$. 2.6. Указание: для вычисления $\log_a b$ с точностью до 0,1 достаточно указать такое целое n, что $n\leqslant 10\log_a b<n+1$, т. е. $a^n\leqslant b^{10}<a^{n+1}$.

2.7. См. указание к задаче 2.6.

2.8. Указание: заменить e на $2{,}7=0{,}1\cdot 3^3$ и использовать указание к задаче 2.6.

2.9. а) $\dfrac{2}{x}$; б) $-\dfrac{2x}{x^2+1}$; в) $\dfrac{1}{x\ln x}$; г) $\dfrac{1}{x\ln 2}$; д) $2^x\ln 2$;

е) $\dfrac{3x^2\log_{10}e}{x^3+1}$.

2.10. Указание: используя формулу бинома Ньютона, доказать, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+ + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times \times\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right);$$

отсюда вытекает, что

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Рассмотреть отношение

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = = \left\{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2}\cdot\frac{n-1}{n^3}-\right.$$

$$-\left[\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{n^3}-\frac{1}{4!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\left(1-\frac{2}{n}\right)\left(1-\frac{3}{n}\right)\frac{1}{n^4}\right]-\ldots\Big\}\left(1+\frac{1}{n}\right)\leqslant$$

$$\leqslant\left(1-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^3}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=$$

$$=1-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{2n^4}<1,$$

откуда

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}<\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n}.$$

2.11. Указание: воспользоваться результатом задачи 2.10.

3.1. а) 3,75; б) 0,5; в) ln 2.

3.2. а) 1; б) 42,2; в) ln 2; г) 444; д) 2/3; е) $0{,}8(2\sqrt[4]{2}-1)$; ж) e^2-e; з) 12/ln2.

3.3. а) $\frac{x^6}{6}+C$; б) $-\frac{1}{2}\cos 2x+C$; в) $\frac{2}{3}x\sqrt{3x+C}$;

г) $\frac{1}{4}e^{4x}+C$.

3.4. Указание: достаточно отдельно рассмотреть случаи

$$f(x)=1,\ f(x)=x,\ f(x)=x^2.$$

4.1. 2.

4.2. Нельзя; площадь равна 4, а интеграл равен 0.

4.3. $1^1/3$.

4.4. Рис. 32.

4.5. $\pi(b-a)\left[R^2-\frac{a^2+ab+b^2}{3}\right]$, где R — радиус шара, a, b — расстояния от центра шара до секущих его плоскостей ($b>a$).

4.6. Для пирамиды и конуса объем $V=\frac{1}{3}S\cdot h$, где S— площадь основания, h — длина высоты; для усеченной пирамиды и конуса $V=\frac{1}{3}(S_1+\sqrt{S_1S_2})\cdot h$, где h — длина высоты, S_1, S_2 — площади оснований.

4.8. $\frac{1}{k+1}$. Указание: записать

$$\frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}}=\frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^k+\left(\frac{2}{n}\right)^k+\ldots+\left(\frac{n}{n}\right)^k\right]$$

и показать, что при $n\to\infty$ эта сумма стремится к $\int_0^1 x^k dx$.

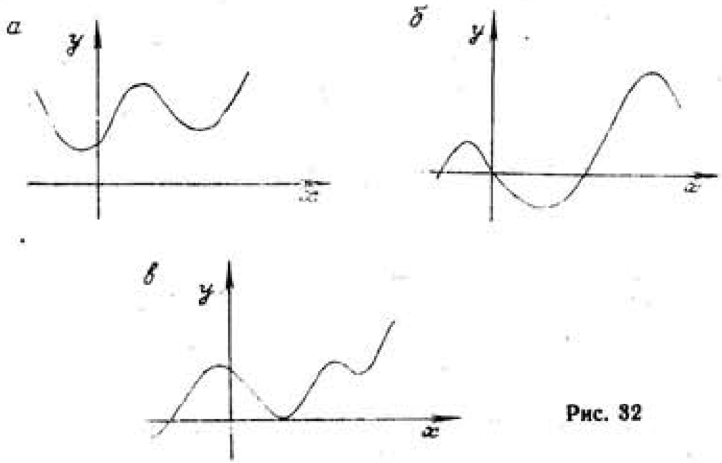

Рис. 32

5.1. 200 дней.

5.2. 1600 лет.

5.3. 10^9 лет.

5.4. 200000 лет.

6.1. $5(2+\sqrt{2})=17$ мин.

6.2. 27 с.

6.3. Вода быстрее вытечет из воронки, обращенной вершиной вниз; в 8/3=2,7 раза быстрее; 4 ч 25 мин и 1 ч 40 мин.

6.4. 3 ч 40 мин.

6.5. 2 ч 40 мин.

6.6. 40 мин.

6.7. 0,5 кг.

6.8. 10 мин.

6.9. 8 ч 15 мин.
7.1. $4p_0/\rho_0 g \cong 33$ км.
9.1. 50 с; 15 м.
9.2. б) 11 км/ч; в) 11 м; г) через 25 с.
9.3. б) через 1,15 с; в) 19,5 м.
9.4. а) Рис. 33.

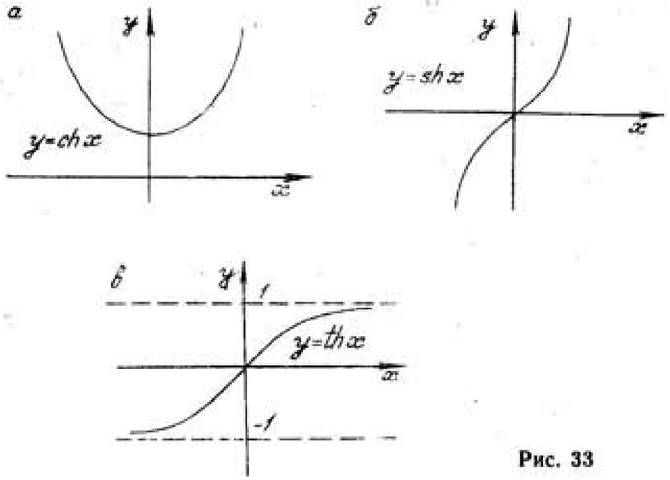

Рис. 33

9.5. 1,7 с, 16 м; без учета сопротивления воздуха 2 с, 20 м.
9.6. 2,1 с, 17,5 м/с; без учета сопротивления воздуха 2 с, 20 м/с.

10.1. $v_0 + gt - u_0 \ln \dfrac{M}{m} \cong 300$ м/с.

11.1. Расстояние $x(t)$ от центра Земли до падающего тела будет меняться по закону $x(t) = R\cos\omega t$. где $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R}}$. Тело достигнет центра Земли за время $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{R}{g}} \cong$ $\cong 21$ мин, а Южного полюса за время $\pi\sqrt{R/g} \cong 42$ мин.

11.2. $v = v_0 \sqrt{1 - \dfrac{2gR}{v_0^2} + \dfrac{2R^2 g}{r v_0^2}}$,

где v — скорость снаряда, v_0 — начальная скорость снаряда в момент выстрела, r — расстояние снаряда до Земли, R — радиус Земли; снаряд не вернется на Землю, если

$v_0 \geqslant \sqrt{2gR} \cong 11{,}2$ км/с.

11.3. $y(t) = C_1 e^{-kt}$, или

$y(t) = A_1 \mathrm{ch}\, kt + B_1 \mathrm{sh}\, kt$, или

$y(t) = A\, \mathrm{sh}(kt + r_0)$; решение может обращаться в 0 не более чем один раз.

А. Р. Мушегян

ЗАДАЧИ ПО БИОЛОГИИ

Олимпиады, турниры и другие формы научных соревнований школьников хорошо зарекомендовали себя в летних школах — лагерях физико-математического профиля. Организация и методика проведения подобных турниров по биологии имеет свою специфику, которая сводится к следующему.

Вопрос викторинного типа, на который возможен быстрый и однозначный, единственно правильный ответ, как правило, бывает неинтересным с биологической точки зрения, поскольку для ответа на такой вопрос достаточно вспомнить цитату из какой-либо книги. Примеры такого рода вопросов: «Какое самое маленькое млекопитающее?» или «Какое растение в средние века называлось «огнем гномов»?». Более приемлемы вопросы, правильный ответ на которые слагается из нескольких идей. Например, вопрос «Какие системы органов служат амфибии для дыхания?» — позволяет более дифференцированно оценивать эрудицию школьника, потому что две из таких систем — легкие и жабры — припоминаются почти всеми, о роли кожи в дыхании амфибий вспоминают немногие, а о значении слизистой оболочки рта — почти никто.

Существует большая группа интересных и важных с биологической точки зрения проблем, на которые, по-видимому, невозможно дать единственно правильный ответ. Часто какое-либо явление приходится объяснять с помощью разных гипотез, каждая из которых содержит зерно истины, отличаясь от прочих только степенью правдоподобия. Из-за этого ответы школьников на такие вопросы предпочтительно иметь в письменном виде и оценивать не с точки зрения правильности или неправильности, а с точки зрения логичности, обоснованности и глубины рассуждений. Данные вопросы более трудоемки в проверке, но последующий разбор ответов на них весьма полезен.

Привлекательная черта вопросов по биологии заключается в их комплексном характере; они могут относиться к области не просто ботаники или биохимии,

но экологической ботаники или эволюционной биохимии. Это требует от учащихся более разносторонних знаний.

Приведем примеры задач, которые предлагались участникам турниров в краевой летней школе при Красноярском университете (КЛШ при КГУ) и на школьной олимпиаде, проводимой биологическим факультетом Московского университета (ШБО МГУ). В рекомендациях использованы материалы программы биологического отделения ВЗМШ АПН СССР.

1. Какие недостатки имеются у наружных хитиновых покровов животных и какие особенности строения служат для их компенсации?

У членистоногих исключено дыхание через кожу, поэтому развиты специализированные органы дыхания — легкие, жабры или трахеи. Хитиновый покров затрудняет рост, в связи с чем в процессе роста таких животных необходимы периодические линьки. Если животное, имеющее покров из хитина, ведет планктонный образ жизни, то для повышения плавучести ему необходимы средства, компенсирующие тяжесть покрова (или тонкий покров, или специальные выросты на нем), хитиновый панцирь до некоторой степени снижает подвижность, отсюда необходимость сочленений на теле и конечностях.

2. У каких моллюсков нет наружной раковины и с какими особенностями их жизни это связано?

Утратили раковину головоногие (в связи с переходом к активному хищничеству), слизни (с переходом к жизни под камнями), крылоногие (с переходом к парению в толще воды), паразитические моллюски. Причины исчезновения раковины у голожаберных неясны. Существует оригинальная группа бороздчатобрюхих моллюсков, лишенных раковины. Вероятно, они никогда ее не имели.

3. Приспособлением к каким условиям может быть увеличение всего растения или его частей?

Приспособительное значение удлинения стебля, корня, корневища очевидно. Прогрессивным приспособлением к опылению насекомыми является увеличение размеров соцветия (например, у сложноцветных). Увеличение листьев водных растений повышает их плавучесть. Огромные размеры ряда пустынных растений (например, некоторых кактусов) снижают испарение (из-за меньшего соотношения поверхности к объему, хотя, конечно, главный способ снижения испарения состоит в уменьшении числа устьиц.)

4. Какие способы движения в водной среде принципиально неприемлемы на суше?

На суше не встречается и, вероятно, невозможно реактивное движение (как у головоногих моллюсков, личинок стрекоз), движение по поверхностной пленке воды (водомерки), движение с помощью «гидравлических» ног.

5. Почему в природе крайне мало морских цветковых растений?

Таких растений мало по сравнению как с водорослями, так и с остальными цветковыми. Высшим растениям вреден избыток солей (если в клетке много солей, затруднены работа белков и транспорт ионов). В водной среде осложнено опыление (у истинно водных цветковых имеется специализированная нитевидная пыльца). Наконец, высшие растения возникли на суше, а в море подходящие для них местообитания уже были заняты, и вселение сопровождалось острой конкуренцией с водорослями — макрофитами.

6. Какие системы служат бесхвостым амфибиям для дыхания? Как по-вашему, почему их несколько?

Личинки бесхвостых дышат жабрами, причем сначала жабры наружные, а в процессе развития они сменяются внутренними. Обитание в воде, при котором имеется жаберное дыхание, есть проявление у личинки признаков предков — рыб. Взрослые земноводные дышат легкими и кожей. Легкие у них невелики по внутренней поверхности, да и ребер, способных растягивать легкие при вдохе (например, у лягушки), нет. Воздух в легкие нагнетается движением дна ротовой полости. Это делает легочное дыхание бесхвостых малоэффективным. До 90% газообмена у амфибий осуществляется через кожу. До некоторой степени для газообмена используется слизистая оболочка ротовой полости.

7. Почему иногда избыток витамина приводит к заболеваниям, причем симптомы таких заболеваний порой бывают те же, что и при недостатке витамина?

Возможны следующие варианты ответа: при избытке витаминов организм теряет способность их усваивать (некоторые старшеклассники поясняют, что избыток витамина ведет к расстройству некоторых ферментных

систем, к снижению уровня ряда ферментов). Избыток одних витаминов влияет в некоторых случаях на усвоение других. Наконец, на широкий круг внешних воздействий организм может отвечать генерализованной реакцией типа стресса. Типичные ошибки: ответ подменяется описанием симптомов гипо- и гипервитаминозов, смешиваются термины «витамин», «гормон» и «фермент», приводится в пример гипервитаминоз по витамину C, которого у человека не бывает, т. к. это единственный витамин, излишки которого полностью выводятся из организма.

8. Каковы функции корней растений?

Очевидны следующие функции: укрепление в почве, всасывание воды и минеральных солей, транспорт их в наземные органы, размножение и распространение, запасание питательных веществ. В последних двух случаях школьники не должны приводить в пример корневища и клубни, являющиеся видоизмененными побегами. Менее распространенные варианты ответа: корни выделяют в почву ряд вредных продуктов метаболизма; корни выделяют вещества, угнетающие рост одних растений и бактерий и стимулирующие рост других; придаточные корни могут служить подпорками стволу (баньян); корни деревьев ответственны за образование микориз, а также срастаются с корнями других деревьев того же вида, что может обеспечивать передачу сигналов от дерева к дереву.

9. Чем объяснить то, что у фокстерьеров и спаниелей чаще рождаются короткохвостые щенки, чем у сеттеров и овчарок?

У сеттеров и овчарок длина хвоста является одним из требований экстерьера, поэтому среди них ведется элиминация короткохвостых особей и их производителей. У фокстерьеров и спаниелей такого отбора нет. В принципе логично утверждение, что на каких-то этапах выведения породы фокстерьеры и спаниели подвергались отбору на короткохвостость, поскольку, например, фокстерьер — норная охотничья собака. Но такой довод не является необходимым для объяснения наблюдаемого. К сожалению, большинство школьников, в том числе тех, которые проходили в курсе 9 класса основы эволюционной теории, дают на этот вопрос неправильный ответ, объясняя высокий процент короткохвостых особей прямым влиянием отрубания хвоста на генотип.

10. Согласно некоторым представлениям, два близких вида, занимающих одно местообитание, находятся в состоянии острой конкуренции, поэтому один из них должен неизбежно вытесниться. Чем объяснить, что два близких вида часто подолгу живут в одном месте, не вытесняя друг друга?

Первая группа объяснений основана на том обстоятельстве, что внутри одной экологической ниши могут быть выделены микрониши. Так, один вид насекомоядных птиц собирает насекомых на концах веток ели, а другой, близкий, вид — у ствола. Головная и лобковая вши питаются человеческой кровью, но живут на разных частях тела. Виды могут различаться не местом, а временем добычи пищи. Варьирует точный спектр пищевых объектов.

Следующая группа объяснений — признание пространственной или временной неоднородности в конкуренции. Например, в одих областях пространства преимущество имеет один вид, в других — другой. Или виды развиваются в разное время: когда один достигает большой численности, другой переживает этот неблагоприятный момент в виде семян, цист, куколок и тому подобных покоящихся стадий.

Иногда ни один вид не способен вытеснить другой, и численность колеблется, попеременно достигая максимума. Если ресурсы находятся в избытке, то виды будут сосуществовать даже в одной нише. Наконец, возможно, что в острой ситуации особи двух видов скрещиваются друг с другом, а это ведет к образованию из двух видов одного.

11. Исчезнет ли из популяции рецессивный аллель, если особи, гомозиготные по этому аллелю, не оставляют потомства?

Ответ большинства школьников на этот вопрос сводится к утверждению, что раз рецессивный аллель не проявляется у гетерозиготных организмов, то в их генотипе он может благополучно сохраниться. Такой ответ неудовлетворителен, потому что вопрос, по сути дела, в том, способен ли отбор удалить из популяции какой-либо вредный рецессивный признак.

Правильный ответ состоит в следующем. Пусть популяция является идеальной, т. е. бесконечно большой

и такой, что все особи скрещиваются с равной вероятностью. Пусть, далее, частота встречаемости рецессивного аллеля p_0, тогда доминантный аллель встречается с частотой $(1-p_0)$. В следующем поколении рецессивные гомозиготы встречаются с частотой p_0^2, и они бесплодны. Из оставшихся $1-p_0^2$ особей гетерозиготными носителями являются особи в числе $2p_0(1-p_0)$. Частота встречаемости гена будет $p_1 = \frac{p_0(1-p_0)}{1-p_0^2} = \frac{p_0}{1+p_0}$.

В следующем поколении она будет $p_2 = \frac{p_1}{1+p_1} = \frac{p_0}{1+2p_0}$

и т. д. $p_n = \frac{p_0}{1+np_0}$. Таким образом, частота встречаемости аллеля будет изменяться в череде поколений (рис. 1). В реальной популяции, имеющей конечные размеры, частота аллеля со временем обязательно станет настолько малой, что случайные процессы элиминируют его носителей.

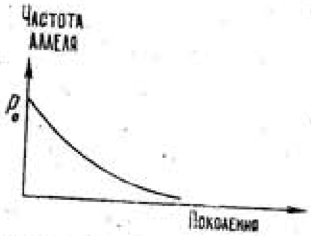

Рис. 1

12. Как известно, вирусы бактерий (бактериофаги) обладают способностью взаимодействовать с клеточной стенкой бактерий и вводить в бактерию свою ДНК. Что мешает бактерии выработать в процессе эволюции более мощную клеточную стенку, которая защищала бы ее от бактериофагов?

Во-первых, паразит и хозяин эволюционируют сопряженно. Химически видоизмененная клеточная стенка приводит к тому, что среди фагов начинается отбор по сродству с ней и по способности фагового фермента делать ее проницаемой.

Во-вторых, для транспорта своей ДНК фаги используют транспортные системы бактерий (например, ДНК фага лямбда проникает в клетку через канал транспорта одного из сахаров). Бактериальная клетка не может стать непроницаемой для транспорта всех веществ.

В-третьих, система защиты от фага не исчерпывается укреплением стенки. Существует множество цитоплазматических ферментов, разрушающих фаговую ДНК. Если эта система достаточно эффективна, то отбор на прочность стенки может и не идти.

Наконец, возможно еще и следующее. Поскольку у бактерий половой процесс встречается относительно редко, любое приспособление к захвату чужой генетической информации и переносу своей является селективно ценным признаком. Фаговая инфекция (в частности, если фаг относится к числу так называемых умеренных фагов) не обязательно приводит к гибели клетки, она может вызвать появление у клетки новых генов, ответственных за проявление полезных признаков.

13. У лягушки перерезали глазной нерв, после чего повернули глаз в орбите на 180°. Нерв регенерировал. Теперь, если лягушке показать муху справа, она прыгнет влево; если муха будет внизу, лягушка прыгнет вверх и т. п. Какой вывод можно сделать из этого опыта?

Вывод состоит в том, что каждая из веток глазного нерва подходит к «своему», особому участку сетчатки. Хотя глаз и перевернут, регенерирующие нервные клетки узнают тот же участок, который они иннервировали до перереза нерва. В итоге в мозг уходит как бы перевернутое изображение.

В настоящее время установлено, что сигналом для роста нервов к глазу является наличие в клетках сетчатки особого белка, концентрация которого меняется от одного края сетчатки к другому. Хотя этот факт школьникам и не известен, они могут сделать предположение о том, что сигнал для роста нерва имеет химическую природу.

14. Если облучить мышь, то у нее погибнут кроветворные клетки. При введении в ее организм суспензии костного мозга крысы мышь восстанавливает свою жизнедеятельность. Как показать, что в ее организме функционируют именно клетки крысы?

Распространенное заключение, что раз мышь не умерла, значит, ее спасли клетки крысы, не является ответом на вопрос. Как показать, что весь мышиный кроветворный аппарат погиб, а вместо него работает крысиный?

Существует ряд взаимосвязанных способов доказательства. Во-первых, в крови мыши обязательно обнаружатся белки крысиного происхождения. Конечно, мы могли внести их с клетками, но если концентрация таких белков остается постоянной с течением времени, то будет разумно предположить, что эти белки постоянно производятся и разрушаются. Крысиную природу белков можно показать, если заранее иметь, например, кроличью сыворотку против белков плазмы крови крысы. Такая сыворотка не будет реагировать с мышиными белками.

Следующее возможное доказательство состоит в отыскании крысиных клеток в кровяном русле. Красные и белые кровяные тельца крысы имеют некоторые морфологические отличия от мышиных клеток. Наиболее доказательно отличие хромосомных наборов. Введением специальных веществ можно побудить клетки кроветворной ткани к активному делению. В крови появится много делящихся клеток, у которых хорошо различимы хромосомы. Число и строение хромосом будет соответствовать крысиному типу, а не мышиному.

Наконец, можно воспользоваться тем, что одной из существенных функций белых кровяных клеток — лейкоцитов являются выработка антител и борьба с пересаженной чужеродной тканью. Поскольку у рассматриваемой мыши эти клетки крысиные, они не будут бороться с крысиными антигенами. Таким образом, на введенные мыши крысиные белки у нее не будет иммунных реакций, а пересаженные ей от крысы ткани не будут отторгаться.

15. Известно, что среди белков паразитических организмов встречаются такие, которые по своей первичной структуре (т. е. по аминокислотным последовательностям) похожи на белки хозяев. Дайте различные объяснения этому факту.

Прежде всего необходимо уточнить, что такое «похожи». Имеет смысл выделить два случая: когда похожи протяженные участки белковой молекулы и когда похожи небольшие участки в составе белка. В первом случае две схожие молекулы имеют, скорее всего, общее происхождение, поскольку вероятность конвергенции по первичной структуре у больших молекул мала. Во втором случае можно предположить и конвергенцию.

Приведем возможные объяснения сходства белков у паразитов и хозяев. Во-первых, существуют белки, которые до некоторой степени схожи вообще у всех животных (например, гистоны, коллаген, гемоглобин). Во-вторых, белок может быть характерным для данной группы животных, если и хозяин, и паразит относятся к этой группе (например, ракообразное — паразит ракообразного).

Следующее объяснение — перенос генов от паразита к хозяину или наоборот. Вирусы и подобные им внутриклеточные паразиты способны переносить из клетки в клетку целые участки ДНК. Хотя примеров этому пока относительно немного, но сама возможность такого переноса показана твердо.

От организма к организму в принципе могут переноситься не сами гены, а кодируемые ими белки. Для пары паразит — хозяин это до сих пор не показано, но существует выразительный пример, когда хищник (ресничный червь) включает в состав своего тела целые клетки жертвы (стрекательные клетки поедаемых им гидр), которые использует в своих целях. Возможно, нечто подобное бывает и в рассматриваемом случае.

Во всех вышеперечисленных случаях изучаемые белки схожи по строению, потому что это обусловлено общностью их происхождения. Но возможно и другое объяснение. Белки паразита могут приобретать черты сходства с хозяйскими, если идет отбор на неиммуногенность, то есть если белки паразита не должны вызывать иммунный ответ у хозяина. Тогда отбор будет поддерживать конвергенцию между участками белковых молекул паразита и хозяина, что можно считать своего рода мимикрией на биохимическом уровне.

16. Почему не перерабатываются клетки стенок желудка и кишечника под действием тех пищеварительных ферментов, которые вырабатываются этими стенками?

Во-первых, белки, производимые клетками «на экспорт», очень быстро включаются в мембраны, с которыми они не взаимодействуют. Кроме того, пепсин, трипсин и другие пищеварительные ферменты в клетке существуют в виде белка-предшественника — длинной белковой молекулы, которая неактивна. При прохождении через мембрану от такого предшественника отщепляется участок из нескольких аминокислот, и только такая, уже покинувшая клетку молекула фермента может выполнять свои функции. Наконец, стенки желудка и кишечника покрыты слизью полисахаридно-белковой природы; здесь белки защищены сахарами, на которые ферменты желудка и кишечника не действуют. В слизи и самих клетках pH близок к 7, пищеварительные же ферменты желудка активны в значительно более кислой среде.

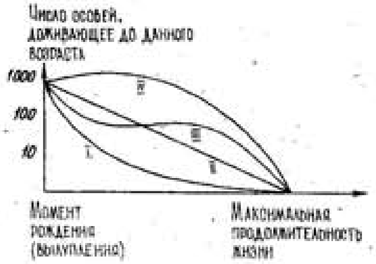

Рис. 2

17. На графике (рис. 2) представлены кривые выживания различных животных. Какая из кривых отражает смертность следующих видов: человека, устрицы, слона, морской звезды, рыбы-луны, снежного барана?

I. Огромная смертность молодых особей (явное отсутствие заботы о потомстве), у взрослых особей смертность значительно меньше (рыба-луна, до некоторой степени морская звезда).

II. Постоянная смертность в любом возрасте, происходящая, следовательно, от внешних причин (устрица, до некоторой степени морская звезда, снежный баран).

III. Смертность велика у молодых и старых особей, но мала у взрослых (снежный баран).

IV. Смертность высока в старости, молодняк почти не вымирает (явная забота о потомстве — слон, человек).

18. Взяв пробу планктона, гидробиолог обнаружил, что рачки одного вида, но разных стадий развития встречаются в пробе в неодинаковых количествах и взрослых форм больше, чем личиночных. Предложите различные объяснения этому факту.

Необходимо представить себе, как живут рачки данного вида. Если в течение лета только одно поколение проходит стадию от личинки до взрослой формы, то, возможно, проба взята, когда большинство особей уже выросло. Если выведение из яиц идет непрерывно, то, надо предполагать, стадия личинки проходит более короткое время, чем взрослая стадия. Тогда вероятность встретить взрослую особь во столько раз больше вероятности встретить личинку, во сколько раз больше срок жизни взрослого.

Причины другого порядка состоят в том, что личинки и взрослые могут обитать на разной глубине или, например, на различном расстоянии от берега, или взрослые особи распределены равномерно, а личинки— компактными группами, которые случайно прошли мимо сачка.

Одна из причин необычного распределения та, что гидробиолог взял сачок со слишком большим размером ячейки.

Ошибочным является ответ, что личинки менее приспособлены и поэтому сильнее гибнут.

19. Почему среди цветковых растений корневых паразитов больше, чем стеблевых?

Корневых паразитов в действительности вдвое больше по числу видов, чем стеблевых. Больше их и по числу особей. Точные причины этого неясны. Возможны следующие логичные ответы: корни чаще служат вместилищем питательных веществ; корни гуще расположены в почве, чем стебли над почвой, и поэтому на корни легче попасть при прорастании; корни лишены всякого рода опушений и клейких жидкостей; обвиваясь вокруг стебля, надо конкурировать с хозяином за свет, а корневой паразит может жить и в стороне.

20. Интересным приспособлением ската к охоте является наличие у него электрического органа, который служит для обездвиживания мелких животных. Но полезным этот орган является лишь после полного формирования. Как он мог сформироваться в ходе эволюции, ведь сначала это была лишь поперечно-полосатая мышца, которая генерировала очень слабые токи? Чтобы эти токи усиливались, мышца должна была изменить свое строение, и тогда возникает момент, когда это уже плохая мышца, но еще не достаточно хороший электрический орган.

Объяснить ситуацию можно, если привлечь принцип смены функций. Мышца ската постепенно генерировала все более сильные токи, и, возможно, наступил момент, когда эта мышца хотя еще и не была хорошим электрическим органом, но генерировала токи доста-

точные, например, для ориентации в пространстве или локации жертвы близ илистого затемненного дна. Тогда и на промежуточной стадии своего развития электрический орган выполнял нужную функцию, и поэтому его существование поддерживалось стабилизирующим отбором.

21. Почему у насекомых «кровь» (гемолимфа), как правило, бесцветная и очень редко — красная (у мотылей — водных личинок комаров), а у позвоночных, наоборот, красная и очень редко бесцветная (у антарктической ледяной рыбы)?

Главная причина — разное соотношение дыхания и кровообращения у насекомых и позвоночных. Красный цвет крови позвоночных придает дыхательный пигмент гемоглобин (точнее, его небелковая часть гем). Красная кровь — это кровь, транспортирующая кислород. У насекомых же «кровь» не переносит кислород — из-за хитинового покрова у них развиты трахеи, которые разветвлены и доставляют кислород к тканям без всякого пигмента-переносчика. Поэтому на гемолимфе насекомых лежит в основном функция переноса питательных веществ. У водных форм дыхание может идти не посредством трахей, а через поверхность кожи, и тогда транспорт кислорода необходим. В этом случае гемоглобин не утрачивается.

22. Раковая опухоль в большинстве случаев представляет собой продукт деления единственной исходной злокачественной клетки. Таким образом, подавляющее большинство клеток органа, в котором образовалась раковая опухоль, — это нормальные клетки. Почему же столь высока смертность от рака?

Раковые клетки питаются более активно, поглощая глюкозу в таких количествах, что ее не хватает соседним клеткам. Бурный рост клеток и прорастание раковых клеток между нормальными разрушают нормальную структуру органов и не дают им слаженно функционировать. Опухоль, достигшая большого размера, может сдавливать органы или уменьшать их просвет (рак пищеварительной системы). Наконец, опухоль может давать метастазы (дочерние опухоли в новых тканях). Неправильно было бы считать, что болезнетворность рака состоит в выделении раковыми клетками ядов или вирусов.

23. Ученый ставил следующий опыт. На одном и том же из трех столиков, стоящих в ряд на дне аквариума, рыбам предлагали корм. Одновременно под столиком включали источник звука. После нескольких кормежек звук включали под другим столиком, но рыбы все равно плыли к столу, где их раньше кормили. Был сделан вывод, что условные рефлексы на звук у этих рыб не образуются. Правильный ли это вывод и как его уточнить?

Вывод неправильный в том отношении, что одновременно с рефлексом на звук ученый вырабатывал еще и рефлекс на место кормления. Необходимо было бы все время менять относительное расположение столиков, каждый раз включая звук под тем, на котором подается пища. Если потом включить звук без подачи пищи, и рыбы не поплывут на звук, то вывод правилен; однако в этом случае нельзя заранее сказать, поплывут ли они все в каком-либо одном направлении. Если же при такой постановке опыта рыбы все-таки поплывут на звук, то следует признать, что рефлексы на звук у рыб формируются, но в случае, приведенном в начале, рефлекс на место доминировал. Уточняющими опытами могут быть такие, когда тот и другой рефлексы формируются то совместно, то порознь, но в разной последовательности.

24. Известно, что в клетке многие ферменты связаны с мембранами. Как вы думаете, почему это происходит?

С формально-химической точки зрения, с мембранами будет связываться такой белок, в составе молекулы которого есть неполярные участки, которые плохо взаимодействуют с полярными молекулами воды, причем эти участки должны при упаковке белковой молекулы оказаться снаружи. Впрочем, некоторые из белков, связанных с мембраной, контактируют с белками мембраны, а не с ее липидной частью.

С точки зрения функции мембранных белков важно следующее. Во-первых, белки — переносчики молекул и ионов — принципиально не могут находиться где-либо, кроме как в мембране. Там же находятся белки, регулирующие целостность, проницаемость и другие функции мембран, белки-рецепторы, а также белки, ответственные за синтез клеточной стенки (хотя и не все) и за движение клеток.

Локализация фермента в мембране дает возможность ускорить превращение вещества-субстрата, потому что у стенки легче создать локальное повышение концентрации субстрата.

Многоферментные системы, в которых каждый последующий фермент использует продукт предыдущей реакции (и поэтому такая система должна работать согласованно), тоже часто размещаются в мембране, поскольку там легче придать ферментам нужное взаимное положение.

25. В некоем оторванном от мира горном государстве действует следующее правило: жениху и невесте разрешают иметь детей, только если их кровь, взятая по капле, при смешивании не дает осадка. Каковы особенности распределения разных групп крови в этой стране?

Решить эту задачу с позиций того, какие группы крови совместимы при переливании, нельзя, ведь в рассматриваемом случае берут равные объемы крови. Правильный ответ таков. При смешивании крови людей, в генотипе одного из которых есть хотя бы один аллель I^A, а у другого — I^B, произойдет агглютинация. Поэтому не будет детей, если один из родителей является носителем аллеля I^A, а другой — I^B, то есть не может возникнуть генотипа I^AI^B. Таким образом, среди жителей нет людей с четвертой группой крови. Частоты других групп крови по имеющимся данным определить невозможно.

26. В одном из дореволюционных романов на с. 41 читаем следующее: «Май подходил к концу. Над заросшим цветущими водорослями прудом неподвижно висели мотыли. Стояла такая тишь, что было слышно, как в траве стучит лапками паучок-серебрянка. Поднявшись до середины стебля, это проворное насекомое вспорхнуло и улетело куда-то вдаль.

На берегу, усыпанном желтыми цветами пижмы и медуницы, сидел сам хозяин имения, отставной поручик Алексей Михайлович Чебурков, и лениво жевал красные сочные вишни, сплевывая кости в пруд. Удил он уже часа два, но кроме двух плотвичек да одной захудалой трески, так ничего и не поймал».

Не допущено ли здесь каких-либо биологических неточностей?

Водоросли не цветут, т. к. это низшие растения, а «цветение» воды в прудах происходит не в мае. Мотыли — личинки комара хирономуса, ведущие водный образ жизни. В средней полосе конец мая — период, когда птицы поют свои брачные песни, поэтому тишь стоять не может. Паук-серебрянка — водное животное, в траве не живет, не летает и насекомым не является. Пижма не цветет в мае, а медуница не желтая. До революции свежие вишни до мая не сохранялись. А. М. Чебурков не мог поймать треску, даже захудалую, так как это морская рыба.

Задачи Московских биологических олимпиад (МГУ)

7 класс

1. Какие связи существуют между грибами и насекомыми?
2. После больших порубок леса, после прокладывания широких просек на месте сведенного леса часто начинается заболачивание. Чем это можно объяснить, ведь эти участки теперь гораздо сильнее освещаются и обогреваются солнцем?
3. В какое время дня легче всего поймать ящерицу и почему?
4. На таинственном острове Жюля Верна водились глухари, ягуары, онагры, орангутаны и пекари. Где мог быть расположен такой остров? Где встречаются упомянутые животные?
5. Чем отличается движение под водой оляпок, пингвинов и поганок?
6. По каким признакам в городском парке можно судить о чистоте воздуха?

8 класс

1. У каких животных нет желудка и как они без него обходятся? У каких животных два желудка и зачем они им нужны?
2. На заброшенной пашне в лесной зоне постепенно восстанавливается коренной лес. Как вы думаете, какие способы распространения плодов и семян были свойственны растениям первых периодов зарастания пашни, а какие — растениям коренного леса?

3. Какие газообразные вещества используют растения и животные и в каких целях?
4. К каким тканям растений или животных отнесли бы вы следующие клетки (рис. 3)? Почему?
5. В чем относительные преимущества и недостатки наружного и внутреннего скелетов?

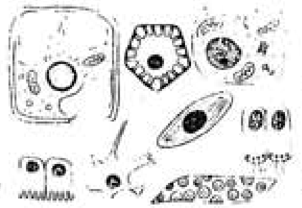

Рис 3

6. Почему невозможно питаться одним сахаром?
7. Какие трудности возникают у организмов в связи с высоким содержанием солей в среде их обитания и как они с этими трудностями справляются?
8. Почему перелетные птицы, улетающие на зимовку к югу, для гнездования возвращаются на север?
9. Какие приспособления имеются у растений, произрастающих на бедных элементами минерального питания почвах?
10. Какими способами растения могут влиять на численность насекомых-хищников и насекомых-паразитов, нападающих на растительноядных насекомых?
11. В чем может состоять польза и вред от антибиотиков для человека?

9 класс

1. Почему в природе чаще встречаются гибриды между различными видами растений, чем между различными видами животных?
2. Зависит ли, по вашему мнению, скорость увеличения числа видов в процессе эволюции некоторого исходного вида от размеров животного? Ответ поясните.
3. С суши биогенные элементы (азот, фосфор, калий и др.) непрерывно уходят в океан. С помощью каких процессов они возвращаются на сушу?
4. Какими могут быть физиологические механизмы действия ядов на организм животных? Приведите примеры реально существующих ядов с таким действием.

13—357

5. Нарисуйте графики зависимости от времени давления крови в желудочке и аорте. На графиках укажите моменты открывания и закрывания сердечных клапанов. Графики поясните.

6. Каким образом в растительных сообществах одни виды могут вытеснять другие?

7. Какие эксперименты надо поставить, чтобы выяснить, обусловлено ли сходство в окраске ос и осовидных мух мимикрией или это явление того же порядка, как в случае сходства окраски тигра и зебры?

8. Объясните, почему у разных видов животных неодинаковая плодовитость: от одного потомка до нескольких миллионов?

9. Почему особи двух близких видов в местах совместного обитания часто различаются сильнее, чем особи тех же двух видов из районов, где они обитают раздельно?

10. Какие эволюционные события в разных группах животных и растений были следствием расцвета покрытосеменных?

11. Почему такие птицы, как цапли, бакланы, пеликаны, чайки образуют большие колонии, а утки — нет?

12. Как вы полагаете, с чем могут быть связаны суточные вертикальные перемещения зоопланктона?

13. Температура тела у птиц выше, чем у млекопитающих. Какие преимущества это дает птицам, и в чем состоят недостатки этой особенности?

14. Почему, как правило, нет четкой границы между лугом и лесом, а существуют особые сообщества растений — растения опушки?

15. Чем вызывается осенний листопад? Предложите эксперименты для проверки ваших гипотез.

16. У каких насекомых есть бескрылые взрослые формы и почему?

17. При первой встрече с новым для себя звуком животное настораживается, при многократном повторении перестает на него реагировать. Как проверить, продолжает ли оно слышать этот звук?

18. Как объяснить вспышки численности насекомых-вредителей?

19. Почему рудиментарные органы (т. е. органы, которые у предков были более развиты) не исчезают полностью, а сохраняются в сильно уменьшенном виде?

20. Известно, что в перенаселенных популяциях грызунов у самок рассасываются эмбрионы, что прекращает опасный всплеск численности. Для популяции это очень хорошо. Как вы думаете, каким образом этот признак мог быть закреплен естественным отбором, ведь вроде бы из двух самок больше шансов оставить потомство у той, которая все-таки родит детенышей, пусть даже шансы на выживание потомства малы (но все-таки больше, чем если потомства просто нет)?

21. Какие сходные приспособления выработались в процессе эволюции у позвоночных и беспозвоночных животных в связи с выходом на сушу?

22. Известно, что в смешанном лесу средней полосы подстилки много, а во влажном тропическом лесу ее почти нет. Как вы думаете, с чем это связано?

23. Объясните, используя конкретные примеры, почему многие животные образуют скопления и какие преимущества им это дает.

24. Известно, что у некоторых животных (зайцев, китов и др.) молоко очень жирное, а у других (обезьян, волков) — нет. Предложите объяснение этому факту и на его основе укажите еще несколько животных, имеющих жирное и нежирное молоко.

25. Что вы можете сказать об эволюционном возрасте семейства растений, представители которого распространены на всех континентах, и семейства, представители которого имеют очень ограниченную область обитания?

26. Как по-вашему, почему уничтожение малярии оказалось относительно простым делом по сравнению с уничтожением клещевого энцефалита?

10 класс

1. Поведение многих животных включает в себя сложные инстинктивные действия (ритуалы), особенно часто связанные с брачным поведением. В чем, по-вашему, может заключаться биологический смысл таких ритуалов?

2. Известно, что число видов водных животных, обитающих в водоемах данной солености, распределяется следующим образом (рис. 4). Как вы можете объяснить такой характер распределения?

3. Чем вызваны периодические вспышки и падения численности у многих животных умеренных и припо-

лярных широт? Почему в тропиках, как правило, резких колебаний численности не происходит?

4. Чем отличается характер адаптаций в центральных и периферических популяциях одного и того же вида?

Рис. 4

5. Нарисуйте схему, показывающую, как поддерживается нормальная температура тела у человека. Схему поясните.

6. Какое биологическое значение имеет наличие разности потенциалов на клеточной мембране?

7. Какое соотношение полов будет в потомстве дрозофил, у которых имеется летальный ген в половой хромосоме?

8. Могут ли быть полезными для растения насекомые, которые им питаются?

9. Различают несколько разных типов размещения животных и растений, относящихся к одному и тому же виду, в пространстве: а) групповое; б) равномерное; в) случайное. Какими причинами может объясняться тот или иной тип размещения? Чем он может быть выгоден организмам?

10. Ареалы, т. е. области распространения, двух близкородственных видов пересекаются. Как вы думаете, в каких частях ареалов животные этих двух видов будут более сходны — в тех, где виды живут по отдельности, или в тех, где они сосуществуют, и почему?

11. Приспособления организмов к взаимовыгодному совместному существованию (мутуализм) имеют заметное адаптивное значение лишь при достаточно совершенном развитии этих приспособлений. Как же они могли возникнуть в процессе эволюции, если на раннем этапе их развития они не могли быть полезными для обоих видов? Попробуйте разобрать этот вопрос на каких-либо конкретных примерах.

12. Существуют организмы, которые большую часть жизненного цикла являются гаплоидными, диплоидными или полиплоидными. Какие преимущества имеет каждый из этих вариантов? Приведите примеры.

13. Чем объясняется пестрота окраски и причудливость формы коралловых рыб?

14. Если человек произвольно напрягает мышцу руки, а затем по мышце наносится удар в направлении, перпендикулярном ходу мышечных волокон, то мышца расслабляется. Объясните, почему это происходит. Ответ поясните рисунком.

15. «Карликовые» породы многих домашних животных в десятки раз мельче (по массе тела) своих диких предков, тогда как «гигантские» породы превышают предков по массе тела в 2—3 раза. Почему не выведены «гиганты», которые были бы крупнее предков во столько же раз, во сколько «карлики» мельче?

16. Почему в наземных биоценозах биомасса потребителей обычно меньше биомассы фотосинтезирующих организмов, а в некоторых водных биоценозах наоборот?

17. Нарисуйте зависимости: 1) содержания ДНК; 2) интенсивности синтеза ДНК; 3) интенсивности синтеза РНК, интенсивности синтеза белка от стадий клеточного цикла. Ответ обоснуйте.

18. Имеется две линии животных А и Б, обладающие разными признаками. При скрещивании самцов А с самками Б и самок А с самцами Б результаты получаются разными. Предложите возможные объяснения этому факту.

19. Почему в примитивных группах высших растений гаметофит (половое или гаплоидное поколение) развит сильнее, тогда как в эволюционно более продвинутых группах он редуцируется, и все большее развитие получает спорофит (бесполое или диплоидное поколение)?

20. Какое биологическое значение имеет повторение идентичных генов в одной хромосоме? Как такое повторение может возникнуть?

И. Д. Фрумин

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ФАНТАЗИЯ

В клубе летней школы начинался вечер. Мы — его организаторы — чувствовали себя неуверенно. Собирались приоткрыть мир графико-математических фантазий нашим ученикам, привыкшим требовать от картины «чтобы все было как в жизни». Хотели показать им странные поверхности и фигуры, не похожие на шумящие леса и могучих лошадей. О чем подумают школьники? Может быть, прав тот, кто предостерегал: «Школьники не поймут, им рано, им не нужно...». И вот на квадрате экрана сменяют друг друга слайды. Лица в бесконечной толпе, руки, вырастающие из листа Мебиуса, падающие с небес брусья... Просмотрено более сотни слайдов. Тишина. Неужели вечер не удался? Голос школьника: «Давайте посмотрим еще раз».

> Мне лично ощущение высшего счастья дают произведения искусства. В них я черпаю такое духовное блаженство, как ни в какой другой области.
>
> А. Эйнштейн

Графические работы, ставшие популярными в летней школе, созданы непрофессиональным художником. Их не найти в толстых художественных альбомах или известных картинных галереях. Их автор — Анатолий Тимофеевич Фоменко — профессор механико-математического факультета Московского университета. Он родился в 1945 году и вырос в г. Магадане. Затем — победы на математических олимпиадах, учеба в МГУ. И сразу в центре внимания молодого студента — современная геометрия. Еще на студенческой скамье А. Т. Фоменко становится соавтором (совместно с Д. Б. Фуксом и В. Л. Гутенмахером) книги «Гомотопическая топология». С той поры все новые математические результаты, статьи, книги, ученики. В 1972 году он решает известную проблему вариационного исчисления — задачу Плато, в двадцать семь лет защищает докторскую диссертацию, становится профессором. А в 1979 году вышел фундаментальный труд Б. А. Дубровина, С. П. Новикова и А. Т. Фоменко «Современная геометрия» — одна из известных книг по математике.

> Вдохновение нужно в геометрии, как и в поэзии.
>
> А. С. Пушкин

Необычные рисунки А. Фоменко на математические темы быстро завоевали популярность. Большим циклом рисунков иллюстрирована книга «Гомотопическая топология» (рис. 1,2). Сегодня, во многом благодаря уникальным иллюстрациям, она стала библиографической редкостью. Пожалуй, с момента выхода в свет «Гомотопической топологии» А. Т. Фоменко известен не только как математик, но и как интересный художник. Выставки его графических листов проходят в Московском университете и в других вузах, в научных институтах и научных центрах. Редакция газеты «Комсомольская правда» проводит такие выставки на ударных стройках. О работах А. Т. Фоменко пишут газеты и журналы, спорят ученые и художники. Не претендует ли он на открытие нового направления в изобразительном искусстве? Безусловно, нет. Работы ученого лежат в русле многовекового традиционного взаимодействия геометрии и искусства. Этой теме посвящено немало интересных исследований. Если говорить о предшественниках Фоменко более конкретно, то нужно назвать Альбрехта Дюрера и Питера Брейгеля, Сальвадора Дали и Морица Эшера. О последнем надо сказать особо. Пожалуй, именно в работах этого голландского художника, нашего современника, геометрические объекты стали главными и непосредственно переживаемыми предметами изобразительного искусства. Но это — профессиональные художники. А зачем тратит время на кропотливый и нелегкий труд художника-графика известный математик? Да затем, что ни математика, ни графика не являются для Фоменко самоцелью. «Думатель» по природе, он использует и науку, и искусство как инструменты точного, полного и цельного познания мира.

> Наука путем сравнений, сопоставлений, соотношений пытается разложить явления мира на их составные элементы. Искусство путем аналогий жаждет связать элементы мира в некоторые целые. Наука, следовательно, дает те элементы, из которых творит художник, и искусство начинается там, где наука останавливается.
>
> В. Я. Брюсов

Рис. 1. Фантазия из цикла «Гомотопическая топология»

Рис. 2. Портрет. Фантазия на тему двумерных поверхностей

Графика — не единственное увлечение профессора Фоменко. В его домашнем кабинете одна из стен занята полосами миллиметровой бумаги, на которые нанесены фамилии, даты, названия стран и событий. Это — глобальная хронологическая карта, — итог более чем десятилетней работы А. Т. Фоменко в области приложения идей математической статистики к исторической хронологии.

Он заинтересовался этим, казалось, далеким от математики предметом довольно случайно, столкнувшись с труднообъяснимыми эффектами в небесной механике — странным поведением ускорения Луны в прошлые эпохи (если верить традиционной датировке). Затем ознакомился с трудами почетного академика АН СССР Н. А. Морозова. В них, в частности, говорилось, что точная датировка исторических событий — задача особой сложности, что общепринятая хронология была создана в XV веке без серьезного научного обоснования, что она полна внутренних противоречий и неясностей. Герой нашего рассказа, заинтересовавшись этой проблематикой, попытался найти в ней точные методы. Ему пришлось и разработать новые способы на огромном летописном материале. Вслед за великим Ньютоном и замечательным революционером-ученым Н. А. Морозовым А. Т. Фоменко применил математические методы к уточнению дат астрономических явлений, описанных в летописях. Выводы из этой работы получились неожиданными, противоречащими традиционным представлениям об античности и средних веках и вызвали всплеск интереса к исторической хронологии, ее методам. Вокруг этих проблем ведутся бурные дискуссии, хотя историки упрямо отказываются выслушать доводы математиков.

И еще одно давнее и крепкое увлечение профессора Фоменко — музыка. Уже много лет он — директор (основанного им в 1963 г.) музыкального клуба «Топаз» на механико-математическом факультете МГУ. В этом клубе он рассказывает о Г. Малере и И. Брамсе как профессиональный музыковед. И нередко в его графике мы слышим отзвуки этой музыки.

Вернемся к обсуждению рисунков в вечернем клубе летней школы.

— Глядя на эти рисунки, надо спрашивать не «Что ты видишь?», а «О чем ты думаешь?»

— Жаль, что я не умею рисовать. Очень хочется сделать что-то похожее, когда решаешь задачи...

— Но это же почти чертежи. Вот «Аленушка» Васнецова... А это — нет, некрасиво.

— Здесь просто другая красота. Мы же не сравниваем красоту математической теоремы и красоту цветка.

— Эта красота будит не только чувство, но и мысль...

— Но разве искусство должно будить мысль? Для этого есть сборники задач.

— Нет, здесь, скорее, пробуждается фантазия. Причем фантазия, нужная ученому.

— А у нас в школе ругали такие картины. Они ведь ни на что не похожи.

— А, по-моему, это и интересно...

Обсуждение длилось долго. И, как часто бывает, почти все остались при своих мнениях. Да и разве можно разговорами разбудить понимание искусства, фантазию, воображение. Дадим искусству говорить за себя, и тогда «имеющий уши услышит».

> «Ученого и художника ведут те же побуждения и требуют от них тех же свойств мысли и действия... Художник и ученый встречаются, чтобы создавать во всех формах Красоту и Счастье, без которых жизнь была бы лишь унылым шествием», — отмечал Ф. Жолио-Кюри.

Нам осталось лишь привести краткий комментарий, подготовленный А. Т. Фоменко для этой книги:

«Работы являются математическими фантазиями на разнообразные темы; в первую очередь они связаны с теми или иными геометрическими объектами. Моей целью была попытка наглядно представить сложные математические конструкции и идеи в графических образах. Многие работы были предназначены для соответствующих математических изданий (книг, журналов и проч.). Кроме них имеется значительный цикл работ, посвященных современному осмыслению средневековых мифов и легенд (рис. 3). Например, цикл «Беседы с авторами XV—XVII веков» (Антидюрер, Антибрейгель и другие). Эти работы являются не антитезой, а попыткой передать современными изобразительными средствами те мысли, которые волновали еще авторов XV—XVII ве-

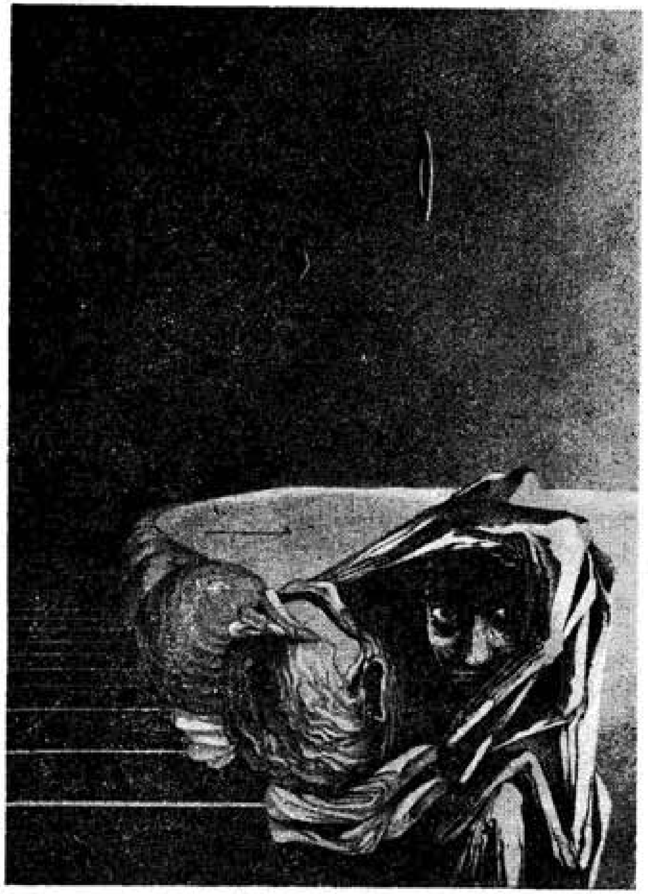

Рис. 3. Фантазия на тему скандинавской легенды

Рис. 4. Антибрейгель

ков. Например, работа Брейгеля «Алхимики» представляла зрителю часть науки его времени. В соответствующей работе «Антибрейгель» (рис. 4) предлагается несколько иной современный взгляд на эту тему.

Во многих случаях графические работы передают не столько математическое содержание, сколько «дух ма-

Рис. 5. Математическая бесконечность

тематики», эмоции, возникающие у математика в процессе творчества. Например, работа «Математическая бесконечность» (рис. 5), конечно, не передает буквально концепцию бесконечности, но отражает личностное представление об этом понятии (возможно, слишком субъективное)».

В. О. Бытев, И. Д. Фрумин

ДВАДЦАТЬ ОДИН ДЕНЬ РАБОТЫ НАД СОБОЙ

(вместо заключения)

Где находится КЛШ?

Последние восемь лет летняя школа базируется в пионерском лагере «Таежный» около старинного сибирского села Атаманово, в сосновом бору на берегу Енисея.

Кто учится в КЛШ?

Двести пятьдесят старшеклассников (выпускников седьмых, восьмых и девятых классов) и учащихся профессионально-технических училищ Красноярского края. В «Таежный» приезжают группы школьников из Новосибирска, Москвы, Перми. Среди учеников КЛШ победители Всесоюзных олимпиад, ученики разных заочных школ, члены научных обществ и просто славные ребята. Конкурс в школу — 2—4 человека на место.

Чему учат в КЛШ?

Нам хочется, чтобы этот вопрос звучал иначе: «Чему учатся в КЛШ?», ведь в процессе обучения главная фигура — ученик. Если он не хочет или не умеет учиться, то перед ним хоть на голове стой — не научишь. Поэтому, прежде всего, мы учим учиться, размышлять, работать над собой. А учебные предметы — это пища для размышлений.

В школе три отделения: физико-математическое, биолого-химическое и информатики. Конкретное содержание основных учебных курсов определяется личными вкусами лекторов. В разные годы в КЛШ были прочитаны такие интересные курсы: «Математика для программирования». Эффективные алгоритмы» (Ю. В. Матиясевич), «Как решать задачу?» (Ш. А. Даутов), «Введение в математическую статистику» (Б. В. Гнеденко), «Комплексные числа и их приложения» (Б. В. Шабат), «От механики к термодинамике» (К. А. Кикоин), «Первые уроки программирования» (Г. А. Звенигородская).

Важная часть жизни летней школы — решение задач. Специальные семинары, всевозможные научные турниры знакомят школьников с разными типами задач, показывают увлекательность решения трудных задач.

Чем занимаются ученики КЛШ после занятий?

Во-первых, занятиями. Во-вторых, спортом, походами... В-третьих, слушают музыку, читают, танцуют и общаются, общаются, общаются... И, конечно, чистят картошку, моют полы, пересчитывают сосны.

Летняя школа длится всего двадцать один день. Разве такого короткого срока достаточно, чтобы чему-то научиться, чтобы изменилась дальнейшая учеба и жизнь?

Пусть на этот вопрос ответят фрагменты из писем наших учеников:

— Я потерял страх перед трудными задачами. Понял, что трудности в познании совершенно естественны. Их не нужно пугаться. Нужно только непрерывно работать над собой.

— Если бы я не съездила в КЛШ, я не увидела бы такой истинно рабочей обстановки и таких интересных, увлеченных людей.

— КЛШ нужна для того, чтобы человек смог подняться на высоту самого себя, правильно оценивать свои возможности и, может быть, определить путь в жизни.

— Если бы я съездил в КЛШ еще после седьмого класса, то уверен: не валял бы дурака в восьмом.

— Когда мне задают вопросы о КЛШ, бывает очень трудно отвечать. Никакие слова не могут передать того, что можно там увидеть. В таких случаях я могу только посоветовать: «Съездите в КЛШ, не пожалеете!».

СОДЕРЖАНИЕ

50 к.